数学分析方法选讲

刘德祥　刘绍武　冯立新◆主编



黑龍江大學出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

责任编辑：张永生　于　丹
封面设计：张广东


ISBN 978-7-81129-633-4
定价：39.00元

数学分析方法选讲

刘德祥　刘绍武　冯立新◆主编


黑龍江大學出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学分析方法选讲 / 刘德祥，刘绍武，冯立新主编
. -- 哈尔滨：黑龙江大学出版社，2014.1
ISBN 978-7-81129-633-4

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①刘… ②刘… ③冯… Ⅲ. ①数学分析-分析方法 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 174160 号

数学分析方法选讲
SHUXUE FENXI FANGFA XUANJIANG
刘德祥　刘绍武　冯立新　主编

责任编辑　张永生　于　丹
出版发行　黑龙江大学出版社
地　　址　哈尔滨市南岗区学府路 74 号
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　720×1000　1/16
印　　张　17
字　　数　343 千
版　　次　2014 年 1 月第 1 版
印　　次　2014 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-81129-633-4
定　　价　39.00 元

前 言

本书是在作者多年来为黑龙江大学数学科学学院高年级学生开设数学分析方法选讲课程所用讲稿的基础上，几经修改和加工整理而成的. 编写本书的目的在于比较系统地整理和提炼数学分析中的一些常用方法和技巧，以提高学生的解题能力. 目前出版的此类书籍虽然很多，但其中大部分是按问题的类型来阐述解题方法的. 因此我们在编写本书时以阐述或介绍各种分析方法与技巧为线索，所有例题和习题都按方法分类. 为了突出方法，有的例题在多处出现，给出了不同的解法，少数定理可能在多处被引入，希望读者予以理解.

本书假定读者已具有数学分析的基础知识，因此引入的定理一般均未给出证明. 在全书所选编的近 600 道例题和习题 (其中有相当数量是结合教学研究自编的) 中，一半以上是有一定难度的，但考虑到学生的实际接受能力，一些过于专业的技巧和问题我们没有编入，整个内容基本上未超出教学大纲所规定的范围，在证明的具体写法上也适当地照顾到这一点.

全书共分 6 章. 第 1 章主要阐述分析证明中的一些最常见的基本处理方法与技巧. 根据教学上的考虑和我们自己的体会，把这些常用的处理方法适当命名后正式地予以提出，我们认为这样做有利于学生加深对方法本身的理解. 第 2 章是 Abel 方法及应用简介. 在第 3 章不等式与估值问题部分中，我们利用幂平均函数对各种平均值不等式统一进行了处理. 考虑到交换运算次序在级数求和及积分计算中的重要性，我们在第 4 章对它进行了一些讨论，并给出了判断级数和积分不一致收敛的比较简单并且使用方便的方法. 第 5 章简略地介绍了阶的估计及其在极限计算和级数与积分收敛性中的应用. 第 6 章用较多的例题介绍极限存在性问题的证法和各种极限的求值方法. 各章的内容都有较大的独立性，因此读者在阅读时可根据自己的需要加以选择.

本书在编写过程中得到了各方面的关心和支持. 哈尔滨工业大学吴从炘教授给予许多指导和鼓励. 黑龙江大学刘礼泉教授仔细地阅读了本书的初稿，提出了不少好的建议. 黑龙江大学数学科学学院的领导十分关心本书的编写，早就建议尽快出版，并给予大力支持. 对以上各位，我们在此一并致以诚挚的谢意. 北京大学出版社和黑龙江大学出版社为本书的出版付出了辛勤的劳动，对此，我们表示衷心的感谢. 由于编者水平所限，书中错误和不妥之处在所难免. 我们真诚地希望得到各方的指教.

编 者

2013 年 10 月于黑龙江大学

内容简介

本书以大学数学分析知识为起点，主要讲述数学分析的方法和技巧，旨在帮助读者加深对数学分析中重要概念和基本方法的理解，提高解题技巧和能力.

全书共分 6 章，主要内容包括：分析证明中的几种常用处理方法与技巧，Abel[①]方法，不等式与估值问题，几种运算次序的交换性，阶的估计及应用，极限的存在性与求值问题，等等. 各章的内容均有较大的独立性，便于读者根据自己的需要进行选择，每章除了典型例题外，还配备了一定数量的习题，可供读者选用.

本书可作为地方综合性大学、师范类和理工类大学的数学系等各专业高年级学生的选修课教材，也可供青年教师及报考研究生的同学参考.

---

① Abel, 阿贝尔， 1802—1829, 挪威.

目 录

第 1 章 分析证明中的几种常用处理方法与技巧 …… 1

1.1 截断 …… 1

习题 1.1 …… 8

1.2 叠加 …… 10

习题 1.2 …… 15

1.3 局部化方法 …… 17

习题 1.3 …… 25

1.4 借助辅助函数 …… 26

习题 1.4 …… 31

1.5 离散型问题与连续型问题的相互转换 …… 32

习题 1.5 …… 38

1.6 ε 逼迫方法 …… 39

习题 1.6 …… 45

1.7 借助于构造点列和抽取子列 …… 46

习题 1.7 …… 53

1.8 关于利用实数空间基本定理证明问题的几点注释 …… 54

1.8.1 有理数集的性质 …… 54

1.8.2 实数集的性质 …… 55

1.8.3 关于利用实数空间基本定理证明问题的几点注释 …… 57

习题 1.8 …… 62

第 2 章 Abel 方法 …… 65

2.1 Abel 变换与 Abel 引理 …… 65

习题 2.1 …… 68

2.2 Abel 方法在级数收敛性判别中的应用 …… 69

2.2.1 数项级数收敛性的判别法 …… 69

2.2.2 函数项级数一致收敛性判别法 …… 72

习题 2.2 …… 74

2.3 Abel 方法在广义积分收敛性判别中的应用 …… 75

2.3.1 分部积分公式与积分第二中值定理 …… 75

2.3.2 无穷限广义积分收敛性的 Abel 判别法与 Dirichlet 判别法 …… 79

2.3.3 带参变量广义积分一致收敛性的 Abel 判别法与 Dirichlet 判别法 . . . 82
习题 2.3 . . . 84
2.4 Abel 级数求和法 . . . 84
习题 2.4 . . . 86
2.5 差分的概念及简单应用 . . . 87
习题 2.5 . . . 90

第 3 章 不等式与估值问题 . . . 91
3.1 不等式的初等证法 . . . 91
习题 3.1 . . . 95
3.2 证明不等式的凸函数方法 . . . 96
3.2.1 凸函数的定义及基本性质 . . . 97
3.2.2 证明不等式的凸函数方法 . . . 102
习题 3.2 . . . 112
3.3 利用微分学证明不等式 . . . 115
习题 3.3 . . . 121
3.4 利用积分学证明不等式 . . . 122
习题 3.4 . . . 130
3.5 估值问题 . . . 132
习题 3.5 . . . 139

第 4 章 几种运算次序的交换性 . . . 141
4.1 一致收敛性 . . . 141
4.1.1 函数项级数的一致收敛性 . . . 141
4.1.2 含参变量积分的一致收敛性 . . . 147
习题 4.1 . . . 151
4.2 运算次序的交换性 . . . 152
4.2.1 求和与其他运算的可换性 . . . 153
4.2.2 积分与其他运算次序的可换性 . . . 158
习题 4.2 . . . 165

第 5 章 阶的估计及应用 . . . 167
5.1 阶的定义及运算 . . . 167
5.1.1 无穷小量与无穷大量的阶的定义 . . . 167
5.1.2 阶的性质和运算 . . . 168

习题 5.1 170
5.2 阶的估计 171
5.2.1 函数的 Taylor 展开式 171
5.2.2 阶与主部的求法 176
习题 5.2 179
5.3 阶的应用 180
5.3.1 利用阶计算极限 180
5.3.2 阶的估计在级数与广义积分收敛性中的应用 185
习题 5.3 189

第 6 章 极限的存在性与求值问题 191
6.1 关于极限定义的若干注释 191
6.1.1 关于过程的刻画和变量的刻画 192
6.1.2 关于变量不存在极限的描述 193
6.1.3 变量趋于无穷大的情形 196
习题 6.1 197
6.2 关于极限的存在性 197
习题 6.2 222
6.3 极限的求值 226
6.3.1 利用定义和两边夹原理求极限 226
6.3.2 利用 Stolz 定理和 L'Hospital 法则求极限 232
6.3.3 建立以极限值为变元的方程求极限 236
6.3.4 利用积分和求极限 239
6.3.5 利用 Reimann 引理求极限 242
6.3.6 利用 Toeplitz 定理求极限 242
6.3.7 求极限的其他方法 246
习题 6.3 254

附录 I Peano 曲线 257

附录 II 关于 e 的超越性 259

主要参考书目 262

第 1 章　分析证明中的几种常用处理方法与技巧

在数学分析中，当我们要证明一个问题时，在有了正确的思路之后，还常常要根据不同对象和题设中的条件采取不同的处理手法，以实现证明的目标. 比如：对函数分段 (即把函数所在区间分为两个或几个区间) 进行研究，把关于离散型变量的问题转换为连续型变量的问题，有些证明还需要借助辅助函数或构造点列，等等. 我们在这一章里，对一些常用的处理方法和技巧加以总结和提炼，并命之以适当的名称，以便于读者更熟练地运用它们.

本章分为 8 节，前 7 节主要讲述分析证明中的几种常用处理方法与技巧，最后 1 节则是对使用实数空间基本定理时应注意的问题给出若干注释.

1.1　截断

我们常常要在某些条件下证明无限区间上的函数或无穷多个函数的和函数具有某些性质. 例如：一个实数轴上处处连续的函数，如果当自变量趋于无穷大时有有限的极限，那么它一定有界；如果函数项级数的每一项当自变量 $x \to x_0$ 时有极限，并且这个级数在包含 x_0 的某个区间上一致收敛，那么这个函数项级数的和的极限等于各项极限的和；等等. 在证明这类问题时，我们的基本依据是有限区间上的函数或有限多个函数的和所具有的相关性质，同时还要根据给定的条件对无限区间或无穷级数进行截断处理 (如何进行具体的截断则要根据不同的问题做具体的分析). 我们把这种处理方法称为截断.

例 1.1.1　设 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$①，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ (其中 l 为有限数)，求证 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

分析　由于 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$，根据局部有界性可知，存在 $A > 0$，使 $f(x)$ 在 $(-\infty, -A)$ 和 $(A, +\infty)$ 上有界，而在 $[-A, +A]$ 上可以从 $f(x)$ 是连续函数这一条件获得其有界性.

证明　对 $\varepsilon = 1$，存在 $A > 0$，当 $|x| > A$ 时，有 $|f(x) - l| < 1$，从而

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - l| + |l| < 1 + |l|.$$

又由 $f(x)$ 在 $[-A, A]$ 上连续可知，存在 $M_1 > 0$，使得当 $|x| \leqslant A$ 时，有

$$|f(x)| \leqslant M_1.$$

---

① $C(-\infty, +\infty)$ 表示定义在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数全体构成的集合，当把 $(-\infty, +\infty)$ 换成其他区间时意义相同.

取 $M=\max\{M_1, 1+|l|\}$, 则对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$|f(x)|\leqslant M.$$

例 1.1.2 设 $u_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内有定义 (在 x_0 点也可以没有定义), $\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x)=l_n$ (l_n 为有限数), 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上一致收敛, 求证

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}l_n.$$

分析 我们面临如下两个问题需要解决:

(1) 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}l_n$ 收敛;

(2) 证明等式 $\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}l_n$ 成立.

问题 (1) 由 Cauchy① 收敛原理不难解决. 问题 (2) 的困难在于项数的无限多, 因为极限运算法则只保证有限多个函数和的极限等于它们极限的和. 这就需要对无限和进行截断处理, 把它截成项数足够多的有穷多项和其余的无穷多项 (即级数的 "尾巴"), 然后分别进行考虑, 即

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty}l_n\right|\leqslant\left|\sum_{n=1}^{N}u_n(x)-\sum_{n=1}^{N}l_n\right|+\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}u_n(x)-\sum_{n=N+1}^{\infty}l_n\right|.$$

我们的目的是证明当 x 充分靠近 x_0 时, 上面不等式的左端能够任意小. 这就要分析不等式右端的情况, 而右端的第一项根据 "有限和的极限等于其各项极限的和" 这一法则, 要它当 $x\to x_0$ 时能任意小是容易办到的; 第二项是两个收敛级数的 "尾巴", 其中 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}l_n$ 是收敛的数项级数的 "尾巴", 只要 N 选得足够大, 它就能任意小, 并且与 x 无关; 另一项 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}u_n(x)$ 是一致收敛的函数项级数的 "尾巴", 只要 N 足够大, 它也能任意小, 并同样与 x 无关, 于是问题就不难解决了. 至于取多大的 N, 这要依赖于正数 ε.

证明 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上一致收敛及 Cauchy 收敛原理可知, 存在 $N\in\mathbb{Z}^+$②, 当 $n>N$ 时, 对 $\forall\,p\in\mathbb{Z}^+$ 及 $\forall\,x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, 有

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon.$$

令 $x\to x_0$, 就得到

$$|l_{n+1}+l_{n+2}+\cdots+l_{n+p}|\leqslant\varepsilon,$$

再由 Cauchy 收敛原理可知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}l_n$ 收敛.

---

① Cauchy, 柯西, 1789—1857, 法国.

② $\mathbb{Z}^+$ 表示全体正整数构成的集合.

另一方面，对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n$ 收敛和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上一致收敛可知，存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 使

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} l_n\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall\, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)).$$

对上述 $\varepsilon > 0$ 及 $N \in \mathbb{Z}^+$, 由 $\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x) = l_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ 可知，存在 $\delta_1 \in (0,\delta)$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时，有

$$|u_n(x) - l_n| < \frac{\varepsilon}{3N} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots,\ N),$$

从而

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} l_n\right| &\leqslant \sum_{n=1}^{N} |u_n(x) - l_n| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(x)\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} l_n\right| \\ &< N\frac{\varepsilon}{3N} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

上面两个例子说明，在进行截断的时候，主要的是要处理好那个“无穷部分”(即截断后剩下的无限区间或无穷级数的“尾巴”), 因为只要把这部分处理妥当之后，我们就可以放心地处理有穷部分了，至于从什么部位上进行截断，则要根据题设条件和证明的需要而定.

例 1.1.3 设 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在且为有限值，求证函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

分析 我们需要证明的是：对 $(-\infty, +\infty)$ 中的任意两点 x', x'', 只要 $|x' - x''|$ 足够小， $|f(x') - f(x'')|$ 就能够任意小. 对于任何有限区间 $[-A, A]$ 来说，这是很容易办到的, 因为闭区间上的连续函数必是一致连续的. 但是, 对于两个无限区间 $(-\infty, -A)$ 及 $(A, +\infty)$ 就不能按同样的想法来对待，因此需要分段考虑. 如何选取上述的正数 A 呢？这就要利用“ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在且为有限值”这个条件了.

对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 由 Cauchy 收敛原理可知，存在 $A > 0$, 只要 $|x'| > A$, $|x''| > A$, 就有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. 这就是说，按上述要求取定了正数 A 之后，两边的无限区间 $(-\infty, -A)$ 及 $(A, +\infty)$ 就可以不去管它，只需处理中间的有限区间 $[-A, A]$ 就可以了.

证明 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 由于 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在且为有限值，根据 Cauchy 收敛原理可知，存在 $A > 0$, 当 $|x'| \geqslant A$, $|x''| \geqslant A$ 时，有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又由 $f(x)$ 在 $[-A, A]$ 上一致连续可知，存在 $\delta \in (0, A)$, 使得对 $\forall\, x'$, $x'' \in [-A, A]$, 只要 $|x' - x''| < \delta$, 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2},$$

于是对 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $|x'-x''|<\delta$ 的任意两点 x' 与 x'' 来说，不论它们属于 $[-A,A]$, 还是属于 $(-\infty,-A)$ 或 $(A,+\infty)$, 都有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

若 $x'\in[-A,A]$, 而 $x''\in(A,+\infty)$, 则由 $|x'-x''|<\delta$ 可知，必有 $|x'-A|<\delta$, 且 $|x''-A|<\delta$, 从而有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-f(A)|+|f(A)-f(x'')|<\varepsilon.$$

对于 $x'\in[-A,A]$, 而 $x''\in(-\infty,-A)$ 的情形同理可证.

总之，只要 $|x'-x''|<\delta$, 就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

例 1.1.4 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，且存在常数 $M>0$, 使得

$$|\varphi(x)|\leqslant M,\quad |\varphi'(x)|\leqslant M\quad(\forall\, x\in(-\infty,+\infty)),$$

求证 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\varphi(nx)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

分析 首先注意本题虽然也是要证明 $f(x)$ 在无限区间上一致连续, 但和例 1.1.3 不同的是，这里不能采用截断区间的办法. 因为尽管容易证明 $f(x)$ 在任意有限区间上一致连续 (一致收敛且每项都连续的函数项级数其和函数也连续), 但对截断后剩下的两个无限区间，由于 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时极限未必存在 (例如 $\varphi(x)=\sin x$ 时), 因此不能像例 1.1.3 那样处理.

然而在已知条件下，级数中的每一项 (即对每个固定的 n) 都在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续，这是因为对 $\forall\, x'$, $x''\in(-\infty,+\infty)$, 根据微分学中值定理，有

$$|\varphi(nx')-\varphi(nx'')|=|n\varphi'(n\xi)(x'-x'')|\leqslant nM|x'-x''|,$$

从而对 $\forall\,\varepsilon>0$, 可取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{nM}$, 当 $|x'-x''|<\delta$ 时，有

$$|\varphi(nx')-\varphi(nx'')|<\varepsilon.$$

假如 $f(x)$ 是有限项的和, 那么问题就十分简单了. 现在的困难在于无穷多项, 但可以证明级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，它的余项就可以忽略不计 (即不论 x 取何值，余项总可以任意小), 因此需要从无穷级数中砍掉 “尾巴”，截出一个项数足够多的有限项的和. 根据一致连续的定义，我们需要估计在任意两点 x', x'' 的函数值之差

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant\left|\sum_{n=1}^{N}a_n[\varphi(nx')-\varphi(nx'')]\right|+\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n||\varphi(nx')-\varphi(nx'')|.$$

证明 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛可知，存在 $L > 0$ 及 $N \in \mathbb{Z}^+$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \leqslant L, \quad \sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n| < \frac{\varepsilon}{4M},$$

于是由 $|\varphi(x)| \leqslant M$ $(\forall\, x \in (-\infty, +\infty))$ 可知，对 $\forall\, x',\ x'' \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n||\varphi(nx') - \varphi(nx'')| \leqslant 2M\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面，对 $\forall\, x',\ x'' \in (-\infty, +\infty)$ 及每一个正整数 n $(n = 1, 2, \cdots, N)$, 由微分学中值定理可知，存在介于 nx' 与 nx'' 之间的 ξ_n, 使得

$$|\varphi(nx') - \varphi(nx'')| = |n\varphi'(\xi_n)(x' - x'')|,$$

于是由 $|\varphi'(x)| \leqslant M$ $(\forall\, x \in (-\infty, +\infty))$ 可得

$$|\varphi(nx') - \varphi(nx'')| \leqslant nM|x' - x''| \leqslant NM|x' - x''|.$$

综上可知，对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2LMN}$, 当 $|x' - x''| < \delta$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{N}|a_n||\varphi(nx') - \varphi(nx'')| \leqslant NM|x' - x''|\sum_{n=1}^{N}|a_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

于是对 $\forall\, x',\ x'' \in (-\infty, +\infty)$, 当 $|x' - x''| < \delta$ 时，有

$$\begin{aligned}|f(x') - f(x'')| &\leqslant \sum_{n=1}^{N}|a_n||\varphi(nx') - \varphi(nx'')| + \sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n||\varphi(nx') - \varphi(nx'')| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

例 1.1.5 设 $f_n(x) \in C[0, +\infty)$, 并且对 $\forall\, A > 0$, $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, A]$ 上一致收敛于 $f(x)$(即内闭一致收敛). 如果 $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $|f_n(x)| \leqslant F(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 求证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

分析 首先由 $|f_n(x)| \leqslant F(x)$ $(n = 1, 2, \cdots,\ x > 0)$ 及 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, +\infty)$ 上内闭一致收敛于 $f(x)$ 可知，$|f(x)| \leqslant F(x)$, 且 $f(x) \in C[0, +\infty)$. 再根据比较判别法可知，对每个 $n \in \mathbb{Z}^+$, 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ 及 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 均绝对收敛.

又由明显的不等式

$$\left|\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x$$

容易看出，为了证明结论成立，只需证明当 n 充分大时，上面不等式的右端能够任意小.

假如右端的积分区间是有限的，则由当 n 充分大时，$|f_n(x)-f(x)|$ 可以任意小，就很容易解决问题了. 现在又面临对无限区间的处理，注意到 $|f_n(x)-f(x)| \leqslant 2F(x)$，而且对充分大的 $A>0$，$\int_A^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x$ 是可以任意小的. 剩下的就是有穷区间的积分了.

证明 对 $\forall\, \varepsilon>0$，取定一个充分大的正数 A，使

$$\int_A^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又因为 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0,A]$ 上一致收敛到 $f(x)$，所以对上述的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{Z}^+$，当 $n>N$ 时，有

$$|f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{3A} \quad (0\leqslant x\leqslant A),$$

于是当 $n>N$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty} f_n(x) - \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_0^A |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x + 2\int_A^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x\\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

截断处理方法不仅适用于无限区间或无限项之和的情形，有时对于有限区间或有限项之和的情形也需要进行截断处理，才能使问题获得解决.

例 1.1.6 设 $f(x)\in R[0,1]$[①]，对 $\forall\, b>0$，$\varphi(x)$ 在 $[0,b]$ 上可积，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lambda$，求证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\varphi(nx)\mathrm{d}x = \lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

分析 显然，我们有不等式

$$\left|\int_0^1 f(x)\varphi(nx)\mathrm{d}x - \lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 |f(x)||\varphi(nx)-\lambda|\mathrm{d}x.$$

为了证明结论成立，需要对上面不等式右端积分进行估计. 由于 $f(x)$ 是有界的 (可积的必要条件)，因此自然希望当 n 充分大时，$|\varphi(nx)-\lambda|$ 能够任意小. 但遗憾的是，因为 x 可以任意接近零，所以不论 n 怎样大，也不能保证 nx 都足够大，从而就不能保证 $|\varphi(nx)-\lambda|$ 对一切 x 都能够任意小. 然而，如果将 $[0,1]$ 截成两段 $[0,\delta]$ 和 $[\delta,1]$ (其中 δ 是任意小的正数)，那么在第一个小区间上的积分就能够

① $R[a,b]$ 表示定义区间 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数全体构成的集合，当把 $[0,1]$ 换成其他区间时意义相同.

任意小 (只需区间长度足够小), 而第二个区间上的积分由于 $nx \geqslant n\delta$, 所以当 n 充分大时, nx 可以充分大, 从而 $|\varphi(nx)-\lambda|$ 也能任意小. 因此, 应该对区间 $[0,1]$ 进行截断.

证明 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lambda$ 可知, 存在 $A>0$, 当 $x\geqslant A$ 时, 有

$$|\varphi(x)-\lambda|<\varepsilon.$$

对上面选定的 $A>0$, 令 $M_1=\sup\limits_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\}$[①], $M_2=\sup\limits_{x\in[0,A]}\{|\varphi(x)-\lambda|\}$, 并取充分大的 $N\in\mathbb{Z}^+$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $\dfrac{A}{n}<1$, 于是当 $n>N$ 时, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1|f(x)||\varphi(nx)-\lambda|\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{A}{n}}|f(x)|\,|\varphi(nx)-\lambda|\mathrm{d}x+\int_{\frac{A}{n}}^1|f(x)|\,|\varphi(nx)-\lambda|\mathrm{d}x\\&<\frac{M_1M_2A}{n}+M_1\varepsilon\Big(1-\frac{A}{n}\Big)<\frac{M_1M_2A}{n}+M_1\varepsilon.\end{aligned}$$

再取 $N_1\geqslant\max\Big\{N,\ \Big[\dfrac{M_2A}{\varepsilon}\Big]\Big\}$, 则当 $n>N_1$ 时, 有

$$\left|\int_0^1 f(x)\varphi(nx)\mathrm{d}x-\lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1|f(x)||\varphi(nx)-\lambda|\mathrm{d}x<2M_1\varepsilon.$$

即

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x)\varphi(nx)\mathrm{d}x=\lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

例 1.1.7 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=l$, 求证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=l.$$

分析 记 $\sigma_n=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$, 则

$$\begin{aligned}|\sigma_n-l|&=\left|\frac{(x_1-l)+(x_2-l)+\cdots+(x_n-l)}{n}\right|\\&\leqslant\frac{|x_1-l|+|x_2-l|+\cdots+|x_n-l|}{n}.\end{aligned}$$

我们来分析一下不等式右端分子的变化情况. 很明显, 虽然项数在不断增多, 但靠后边的一些项会随着 n 的增大而变小, 可以任意小, 而前边的那些项则是固定不变的, 根本不能变小. 因此我们可考虑将它们分段处理.

---

① $\sup\limits_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\}$ 表示数集 $\{|f(x)|\mid x\in[0,1]\}$ 的上确界. 数集 E 的上确界通常记为 $\sup E$.

对 $\forall \varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ 可知，存在 $N\in\mathbb{Z}^+$, 当 $n>N$ 时，有 $|x_n-l|<\varepsilon$. 因此，对于这样取定的 N, 不论 n 怎样大 (即项数不论怎样多), 从第 $N+1$ 项开始，以后每项都小于 ε, 而这些项加起来小于 $(n-N)\varepsilon$, 再被 n 除一下就要小于 $\left(1-\dfrac{N}{n}\right)\varepsilon<\varepsilon$, 所以我们可以不去管它了. 另一方面，既然 N 已经取定，从第 1 项到第 N 项加起来就是一个固定数，它被 n 除之后就会随着 n 的增大而变小.

证明 对 $\forall \varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ 可知，存在 $N\in\mathbb{Z}^+$, 当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-l|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对于取定的 N, 选取 $N_1\geqslant N$, 使得当 $n>N_1$ 时，有

$$\frac{|x_1-l|+|x_2-l|+\cdots+|x_N-l|}{n}<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是当 $n>N_1$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n}-l\right| &\leqslant \frac{|x_1-l|+|x_2-l|+\cdots+|x_n-l|}{n}\\ &= \frac{|x_1-l|+\cdots+|x_N-l|}{n}+\frac{|x_{N+1}-l|+\cdots+|x_n-l|}{n}\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=l.$$

截断处理是数学分析中的一种比较基本的手法，通过它可以把许多有限范围内成立的性质和结论扩展到无限范围，因此，我们在处理与无限范围有关的问题时，应当有一种截断的意识.

习题 1.1

1.1.1 设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 都存在且为有限值，求证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

1.1.2 设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 并且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, 求证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在最小值.

1.1.3 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$f_1(x)\geqslant f_2(x)\geqslant\cdots\geqslant f_n(x)\geqslant\cdots$, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛于一个有界函数. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=b_n\ (n=1,2,\cdots)$, 求证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 收敛，且

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_nf_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n.$$

1.1.4 设 $f(x) \in C(-\infty,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. 若 $f(x)\geqslant 0$, 求证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有最大值.

1.1.5 设 $f_n(x)\in C[a,b)$, 并且对 $\forall\,\delta\in(0,b-a)$, 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b-\delta]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 如果 $\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$ 存在, 且 $|f_n(x)|\leqslant F(x)$ $(n=1,2,\cdots)$, 求证

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

1.1.6 设 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积, 求证 $f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\cos xt\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

1.1.7 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, 求证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_{n-1}y_2+x_ny_1}{n}=ab.$$

(提示: 类似于本节例 1.1.7, 可分三段处理.)

1.1.8 设 $\{a_n\}$ 为非负数列, $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, 求证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是 $S(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有界; 并且当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛时, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{x\to1^-}S(x).$$

1.1.9 设 $f_n(x)=\dfrac{a_n}{n!}\int_0^x t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ $(n=1,2,\cdots,\ 0<x<+\infty)$, 求证函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛的充要条件是数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛; 并且当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛时, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\int_0^x t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

1.1.10 设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 记 $f_n(x)=\dfrac{1}{n!}\int_0^x t^n\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$ $(x>0,\ n=1,2,\cdots)$, 求证:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nf_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛;

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nf_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nf_n(x)=0$.

(提示: 在 $[0,1+\delta]$ 和 $[1+\delta,+\infty)$ 上分别利用不等式

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{n!}\int_0^x t^n\mathrm{d}t,\quad |f_n(x)|\leqslant\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t,\quad (n=1,2,\cdots),$$

其中 $\delta>0$.)

1.1.11 设 $f(x)\in C[a,+\infty)$, $g(x)\geqslant 0$, 且积分 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 均收敛, 求证: 存在 $\xi\geqslant a$, 使得

$$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x.$$

1.1.12 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$ 均收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 0$. 令 $\varphi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-nx}$, 求证：

(1) $\lim\limits_{x\to 0+} \varphi(x) = 0$;

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}-1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛；

(3) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\varphi(x)}{x} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$.

1.1.13 设 $f(x) \in C(a,b)$, 且 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ 均存在且有限，求证 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界且一致连续.

1.2 叠加

为了弄清“叠加”这种证明技巧，我们先看一个具体例子.

例 1.2.1 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，并且

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = l,$$

求证 $f'(0)$ 存在，且 $f'(0) = l$.

分析 我们的目的是要证明

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = l. \tag{$*$}$$

它与所给极限在形式上有相似之处，但却不能从已知极限经过简单变形 (例如插项等) 直接得出，因此需要对已知极限有更深入的理解. 事实上，它蕴含下面一系列极限式子：

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\dfrac{x}{2}} = l,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f\left(\dfrac{x}{2}\right)-f\left(\dfrac{x}{4}\right)}{\dfrac{x}{4}} = l,$$

$$\cdots,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f\left(\dfrac{x}{2^{n-1}}\right)-f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\dfrac{x}{2^n}} = l \quad (n\in\mathbb{Z}^+).$$

如果注意到把这 n 个极限式子中的各个分子相加，就可得到 $f(x)-f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$, 再令 $n\to\infty$, 就可化为 $f(x)-f(0)$ (因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续), 这正是要证明极限式 $(*)$ 所需要的. 为了使这种叠加得以实施，需要把 n 个极限式换成不等式形式.

证明 先证明 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的右导数 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=l$.

对 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=l$ 可知，存在 $\delta>0$, 当 $0<x<\delta$ 时，有

$$l-\varepsilon<\frac{f(2x)-f(x)}{x}<l+\varepsilon,$$

或

$$(l-\varepsilon)x<f(2x)-f(x)<(l+\varepsilon)x.$$

把此不等式中的 x 依次换成 $\dfrac{x}{2},\dfrac{x}{4},\cdots,\dfrac{x}{2^n}$ (注意它们都介于 0 与 δ 之间), 得

$$\begin{aligned}
&(l-\varepsilon)\frac{x}{2}<f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)<(l+\varepsilon)\frac{x}{2},\\
&(l-\varepsilon)\frac{x}{4}<f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{4}\right)<(l+\varepsilon)\frac{x}{4},\\
&\cdots,\\
&(l-\varepsilon)\frac{x}{2^n}<f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)<(l+\varepsilon)\frac{x}{2^n}.
\end{aligned}$$

累加上述不等式得

$$(l-\varepsilon)\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\cdots+\frac{x}{2^n}\right)<f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)<(l+\varepsilon)\left(\frac{x}{2}+\cdots+\frac{x}{2^n}\right),$$

即

$$(l-\varepsilon)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)x<f(x)-f(\frac{x}{2^n})<(l+\varepsilon)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)x.$$

因这个不等式对一切正整数 n 都成立，所以可令 $n\to\infty$, 得

$$(l-\varepsilon)x\leqslant f(x)-f(0)\leqslant(l+\varepsilon)x,$$

即

$$l-\varepsilon\leqslant\frac{f(x)-f(0)}{x}\leqslant l+\varepsilon.$$

依极限的定义得

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=l,$$

即 $f'_+(0)=l$.

类似可证明 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左导数 $f'_-(0)$ 存在，且 $f'_-(0)=l$.

综上可知， $f'(0)$ 存在，且 $f'(0)=l$.

在这个例子的证明过程中，我们利用了叠加的技巧，它在证明中起了关键作用. 有不少与极限相关问题的证明要用叠加，其基本思路是:

假设我们已知某个变量存在极限 (如 $\lim\limits_{x\to a}F(x)=l$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$), 那么根据极限定义，在过程的每个阶段上 (如 $0<|x-a|<\delta$, $n>N$) 可以得到一系列

表现变量变化范围的不等式 (如 $l-\varepsilon<F(x)<l+\varepsilon$, $l-\varepsilon<a_{N+k}<l+\varepsilon$). 假如这一系列不等式经过叠加、化简而变成另一变量在同一阶段上的不等式 (如 $l-\varepsilon<G(x)<l+\varepsilon, l-\varepsilon<b_n<l+\varepsilon$), 那么我们也就证明了这另一变量存在极限 (如 $\lim\limits_{x\to a}G(x)=l$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=l$).

应该注意的是, $\lim\limits_{x\to a}F(x)=l$ 经过叠加而演变成 $\lim\limits_{x\to a}G(x)=l$, 或 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$ 经过叠加而演变成 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=l$, 是跟 $F(x)$ 与 $G(x)$ 及 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 具有某种特定的结构形式密切相关的.

例 1.2.2 (Stolz① 定理)

设 $\{x_n\}$ 为任意数列, $\{y_n\}$ 为严格单调增加而趋于 $+\infty$ 的数列, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l,$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=l$.

(Stolz 定理是对离散情形确定 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 不定型的 L'Hospital② 法则.)

证明 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l$ 可知, 存在 $N\in\mathbb{Z}^+$, 当 $n\geqslant N$ 时, 有 $y_n>0$, 且

$$l-\varepsilon<\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}<l+\varepsilon,$$

或

$$(l-\varepsilon)(y_{n+1}-y_n)<x_{n+1}-x_n<(l+\varepsilon)(y_{n+1}-y_n).$$

因为上面的不等式对一切的 $n\geqslant N$ $(n\in\mathbb{Z}^+)$ 都成立, 所以有

$$(l-\varepsilon)(y_{N+1}-y_N)<x_{N+1}-x_N<(l+\varepsilon)(y_{N+1}-y_N),$$

$$(l-\varepsilon)(y_{N+2}-y_{N+1})<x_{N+2}-x_{N+1}<(l+\varepsilon)(y_{N+2}-y_{N+1}),$$

$$\cdots,$$

$$(l-\varepsilon)(y_n-y_{n-1})<x_n-x_{n-1}<(l+\varepsilon)(y_n-y_{n-1})\quad(n>N),$$

于是把上述不等式叠加后, 得

$$(l-\varepsilon)(y_n-y_N)<x_n-x_N<(l+\varepsilon)(y_n-y_N)\quad(n>N),$$

---

① Stolz, 斯托尔兹, 1842—1905, 奥地利.

② L'Hospital, 洛必达, 1661—1704, 法国.

再由 $y_n > 0\ (n > N)$ 可得

$$(l-\varepsilon)\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right) < \frac{x_n}{y_n} - \frac{x_N}{y_n} < (l+\varepsilon)\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right).$$

令 $n \to \infty$, 由 $y_n \to +\infty$ 可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_N}{y_n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_N}{y_n} = 0,$$

从而有

$$l-\varepsilon \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} \leqslant l+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性，我们有

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = l,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = l$.

例 1.2.3 (Lobatchevsky① 判别法)

设 $\{a_n\}$ 单调减少趋于零， $p_m(m=1,2,\cdots)$ 是满足不等式 $a_n \geqslant 2^{-m}$ 的项 a_n 的最大下标，求证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 同时收敛或同时发散.

证明 由 p_m 的定义可知，当 $n \leqslant p_m$ 时， $a_n \geqslant \frac{1}{2^m}$, 当 $n > p_m$ 时， $a_n < \frac{1}{2^m}$, 于是对满足不等式 $p_m < n < p_{m+1}$ 的一切正整数 n 都有

$$\frac{1}{2^{m+1}} \leqslant a_n < \frac{1}{2^m}.$$

令 $n = p_m+1,\ p_m+2,\cdots,p_{m+1}\ (m=1,2,\cdots)$, 则有

$$\frac{1}{2^{m+1}} \leqslant a_{p_m+1} < \frac{1}{2^m},\quad \frac{1}{2^{m+1}} \leqslant a_{p_m+2} < \frac{1}{2^m},\quad \cdots,\quad \frac{1}{2^{m+1}} \leqslant a_{p_{m+1}} < \frac{1}{2^m},$$

于是将上述不等式叠加，得

$$\frac{1}{2^{m+1}}(p_{m+1}-p_m) \leqslant a_{p_m+1}+a_{p_m+2}+\cdots+a_{p_{m+1}} < \frac{1}{2^m}(p_{m+1}-p_m).$$

因为上面的不等式对一切 $m\ (m\in\mathbb{Z}^+)$ 都成立，所以有

$$\frac{1}{2^2}(p_2-p_1) \leqslant a_{p_1+1}+a_{p_1+2}+\cdots+a_{p_2} < \frac{1}{2}(p_2-p_1),$$

$$\frac{1}{2^3}(p_3-p_2) \leqslant a_{p_2+1}+a_{p_2+2}+\cdots+a_{p_3} < \frac{1}{2^2}(p_3-p_2),$$

$$\cdots,$$

$$\frac{1}{2^{m+1}}(p_{m+1}-p_m) \leqslant a_{p_m+1}+a_{p_m+2}+\cdots+a_{p_{m+1}} < \frac{1}{2^m}(p_{m+1}-p_m),$$

① Lobatchevsky, 罗巴切夫斯基， 1792—1856, 俄国.

于是把这 m 个不等式叠加，并利用 $\dfrac{1}{2^{k+1}}-\dfrac{1}{2^{k+2}}=\dfrac{1}{2^{k+2}}$ 可得

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{p_k}{2^{k+1}}+\left(\frac{p_{m+1}}{2^{m+1}}-\frac{p_1}{2}\right)\leqslant\sum_{k=p_1+1}^{p_{m+1}}a_k\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{p_k}{2^k}+\left(\frac{p_{m+1}}{2^m}-p_1\right)\quad(m\in\mathbb{Z}^+).$$

如果记 $S_m=\sum\limits_{k=1}^{m}a_k$, $\sigma_m=\sum\limits_{k=1}^{m}p_k2^{-k}$, 则上面的不等式可写为

$$\frac{1}{2}\sigma_m+\left(\frac{p_{m+1}}{2^{m+1}}-\frac{p_1}{2}\right)\leqslant S_{p_{m+1}}-S_{p_1}\leqslant\sigma_m+\left(\frac{p_{m+1}}{2^m}-p_1\right),$$

于是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n2^{-n}$ 都是正项级数可知，它们的收敛性与其部分和的有界性是一致的. 因此，这个不等式表明两个级数同时收敛或同时发散.

例 1.2.4 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，且 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，求证

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

证明 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 由 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续可知，存在 $\delta>0$, 使得对 $\forall\,x',x''\in[a,+\infty)$, 当 $|x'-x''|\leqslant\delta$ 时，有

$$-\varepsilon<f(x')-f(x'')<\varepsilon.$$

对上述的 ε 和 δ, 由 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛及 Cauchy 收敛原理可知，存在 $A>0$, 当 $A''>A'\geqslant A$ 时，有

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon\delta,$$

于是对 $\forall\,x>A$, 当 $t\in[x,x+\delta]$ 时，有

$$-\varepsilon<f(x)-f(t)<\varepsilon.$$

既然这个不等式对 $\forall\,t\in[x,x+\delta]$ 都成立，那么我们将区间 $[x,x+\delta]$ 分成 n 等份，并设分点为 $x=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=x+\delta$, 则有

$$-\varepsilon<f(x)-f(t_1)<\varepsilon,\ -\varepsilon<f(x)-f(t_2)<\varepsilon,\ \cdots,\ -\varepsilon<f(x)-f(t_n)<\varepsilon,$$

于是把 n 个不等式加起来再除以 n, 得

$$-\varepsilon<f(x)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(t_k)<\varepsilon.$$

由 $f(x)$ 在 $[x,x+\delta]$ 上可积，并注意到上面的不等式对 $\forall\,n\in\mathbb{Z}^+$ 都成立，故令 $n\to\infty$ 便可得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(t_k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\delta}\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\cdot\frac{\delta}{n}=\frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta}f(t)\mathrm{d}t,$$

$$-\varepsilon \leqslant f(x) - \frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon,$$

从而

$$\left|f(x) - \frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta} f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon.$$

综上可知，对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 及 $A > 0$, 当 $x > A$ 时，有

$$|f(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{1}{\delta}\left|\int_x^{x+\delta} f(t)\mathrm{d}t\right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

注 在例 1.2.4 的证明过程中，从不等式

$$-\varepsilon < f(x) - f(t) < \varepsilon$$

到不等式

$$-\varepsilon < f(x) - \frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta} f(t)\mathrm{d}t < \varepsilon,$$

也可对前一个不等式关于 t 从 x 到 $x+\delta$ 积分，其结果是一样的. 积分可以看作是一种“连续求和”，因此也是叠加过程. 有些问题的证明就是靠这样一种叠加方法完成的 (见习题 1.2.13).

习题　1.2

1.2.1 设 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$, 求证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n + x_{n-1}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0.$$

1.2.2 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1) - f(x)] = l$, 求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = l$.

1.2.3 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，并在任何有限区间 $(0,b)$ 上有界，且对 $\forall\, a > 0$, 有

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+a) - f(x)] = +\infty,$$

求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

1.2.4 设 $f(x)$ 满足 $f(0) = 0$, $f'(0) = l$, 求证

$$\lim_{n\to\infty}\left[f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n^2}\right)\right] = \frac{l}{2}.$$

(提示：利用 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x} = f'(0)$ 之定义.)

1.2.5　用叠加方法证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = l$.

1.2.6　设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义，并在每个有限区间 $(0,b)$ 上有界，且对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^n} = l,$$

求证：$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^{n+1}} = \dfrac{l}{n+1}$, 其中 l 为有限数或 ∞.

1.2.7　设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义，并在每个有限区间 $(0,b)$ 上有界，$f(x)\geqslant c>0$, 且

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = l,$$

求证 $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = l$.

1.2.8　设 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, 且 $f(x) - f\left(\dfrac{x}{2}\right) = o(x)\ (x\to 0)$, 求证 $f(x) = o(x)\ (x\to 0)$.

1.2.9　设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)\ (a>0)$ 上一致连续，求证：存在常数 $M>0$, 使得

$$|f(x)| \leqslant Mx \quad (a\leqslant x<+\infty).$$

1.2.10　设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义, 并对 $\forall\,\varepsilon>0$, 只要 x', $x''\in[a,+\infty)$, 且 $|x'-x''|<\varepsilon$, 就有

$$|f(x')-f(x'')| < \varepsilon^{\lambda} \quad (\lambda>1),$$

求证 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

1.2.11　设 $a_n>0$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\ (n=1,2,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, 求证：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{S_n} = 0$;　　　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n^2}$ 收敛.

(提示：对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛和发散两种情形分别考虑.)

1.2.12　设 $f(x)\in C[a,+\infty)\ (a>0)$, $f(x)>0$, 且 $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 又已知

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda > 1 \quad (a\leqslant x_n<+\infty,\ n=1,2\cdots),$$

求证：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) = 0$, 其中 ξ_k 为 $f(x)$ 在 $[x_k,x_{k+1}]$ 上的最小值点 $(k=1,2\cdots)$.

(提示：利用积分的 Cauchy 收敛原理.)

1.2.13　设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 且对 $\forall\, x,\ y\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

求证：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2},$$

其中 $-\infty<a<b<+\infty$.

1.3 局部化方法

为了讲清局部化方法的含义和背景，让我们先简要回顾一下关于 Fourier① 级数收敛性的 Riemann② 局部化定理及证明过程.

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期并且逐段连续的函数，它所对应的 Fourier 级数为

$$f(x) \backsim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

其中 $f(x)$ 的 Fourier 系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

利用恒等式

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

进行简单运算可知， $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和为

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t) + f(x-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

从而对任意常数 A, 有

$$\begin{aligned} S_n(x) - A &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t) + f(x-t) - 2A]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\psi(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

其中 $\psi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2A$.

① Fourier, 傅立叶， 1768—1830, 法国.

② Riemann, 黎曼， 1826—1866, 德国.

Fourier 级数收敛性的中心问题是：对 $\forall\, x \in [-\pi, \pi]$, 是否存在 A(只与 x 有关), 使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{2\sin\dfrac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t = 0. \tag{$*$}$$

对 $\forall\,\delta\ (0<\delta<\pi)$, 我们把 $(*)$ 式中的积分分成如下两段：

$$\begin{aligned} S_n(x) - A &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{2\sin\dfrac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{\psi(t)}{2\sin\dfrac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_\delta^{\pi} \frac{\psi(t)}{2\sin\dfrac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

在上式右端的第二个积分中，由于 $\dfrac{\psi(t)}{2\sin\dfrac{t}{2}}$ 在 $[\delta, \pi]$ 上逐段连续，根据 Riemann 引理，有

$$\lim_{n\to\infty} \int_\delta^{\pi} \frac{\psi(t)}{2\sin\dfrac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t = 0,$$

于是 $(*)$ 式与

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \frac{\psi(t)}{2\sin\dfrac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t = 0 \tag{$**$}$$

是等价的．又因为 $\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2\sin\dfrac{t}{2}}$ 在 $[0,\delta]$ 上逐段连续 (它以 $t=0$ 为可去间断点), 再一次应用 Riemann 引理可知，$(**)$ 式与

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \frac{\psi(t)}{t} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t = 0$$

等价，于是我们就如下证明．

定理 1.3.1 (Riemann 局部化定理)

设以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上逐段连续，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在任意点 x 处收敛于 A 的充分必要条件是：对 $\forall\,\delta\ (0<\delta<\pi)$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \frac{\psi(t)}{t} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t = 0.$$

Riemann 局部化定理的意义在于：函数 $f(x)$(它应满足定理中的条件) 的 Fourier 级数的收敛性由函数 $\dfrac{\psi(t)}{t}$ 的局部性质 (即在区间 $0 \leqslant t \leqslant \delta$ 内的性质) 所决定，即

对 $\forall\,\delta>0\ (0<\delta<\pi)$ 皆有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\psi(t)}{t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{\psi(t)}{t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t.$$

如果记 $\varphi_n(t)=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}$, 则上面的极限式为

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\psi(t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\psi(t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t\quad(0<\delta<\pi),$$

而值得注意的是

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to0}\varphi_n(t)=\lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)=+\infty.$$

Riemann 引理及其证明过程引导我们如何去解决数学分析中形如

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\psi(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x$$

的一类极限问题，其中 $\psi(x)\in C[a,b]$. 它有如下特点：

(1) 存在唯一的 $x_0\in(a,b)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}\varphi_n(x)=\infty;$$

(2) 对 $\forall\,\delta>0$, 当 $a\leqslant x_0-\delta<x_0+\delta\leqslant b$ 时，均有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{x_0-\delta}\psi(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{x_0+\delta}^b\psi(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\psi(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\psi(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x,$$

这里的点 x_0 称为奇异点.

因此，处理这类极限问题，第一要找出奇异点；第二是恰当地选择 δ, 然后再进行具体计算或估值. 有些情形，为了便于计算或估值，也可把 δ 选择为与 n 有关的量，即 $\delta=\delta_n$, 这个 δ_n 应当满足以下两个要求：其一是当 $n\to\infty$ 时， $\delta_n\to0$ (因为 δ 必须是能够任意小的); 其二是对这种变化的 δ_n, 必须使

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{x_0-\delta_n}\psi(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{x_0+\delta_n}^b\psi(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=0.$$

在进行这样的处理之后，便可进行计算或估值了.

这里需要说明的是：对于区间 $[a,b]$ 内有有限个奇异点或区间端点为奇异点的情形可进行类似的处理. 我们把上述处理这类极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x$$

的方法称为局部化方法.

例 1.3.1 设 $f(x)\in C[0,1]$, 求证

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0).$$

分析 设 $\varphi_n(x)=\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx^2}\ (n=1,2,\cdots)$, 则显然有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(0)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty,$$

而对 $\forall\, x\in(0,1]$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx^2}=0,$$

这说明 $x=0$ 是积分区间 $[0,1]$ 上唯一的奇异点，并且不难看出，对 $\forall\,\delta\in(0,1)$, 由

$$\begin{aligned}\left|\int_\delta^1 \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx^2}f(x)\mathrm{d}x\right|&=\left|f(\xi)\int_\delta^1 \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant|f(\xi)|\sqrt{n}\mathrm{e}^{-n\delta^2}(1-\delta)\quad(\delta\leqslant\xi\leqslant 1)\end{aligned}$$

可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\delta^1 \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx^2}f(x)\mathrm{d}x=0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx^2}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx^2}f(x)\mathrm{d}x.$$

上面只是对要证明的极限做了定性分析，但这个极限值究竟是多少？为了能够具体估算它，我们选择与 n 有关的 $\delta=\delta_n$, 使得当 $n\to\infty$ 时， $\delta_n\to 0$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta_n}^1 \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx^2}f(x)\mathrm{d}x=0.$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta_n}^1 \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx^2}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}f(\eta_n)\int_{\delta_n\sqrt{n}}^{\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\quad(\delta_n<\eta_n<1),$$

所以由积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 收敛及 Cauchy 收敛原理可知, 只要 $\delta_n\sqrt{n} \to +\infty\ (n \to \infty)$ 就可保证上式成立, 于是 δ_n 的选择便十分明确了: 既要使 $\delta_n \to 0\ (n \to \infty)$ 成立, 又要使 $\sqrt{n}\delta_n \to +\infty\ (n \to \infty)$ 成立. 因此, 可选择 $\delta_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}, \dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$ 等.

证明 取 $\delta_n = \dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}\ (n \in \mathbb{Z}^+)$, 则由积分中值定理可得

$$
\begin{aligned}
\sqrt{n}\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2} f(x)\mathrm{d}x &= \sqrt{n}\int_0^{\delta_n} \mathrm{e}^{-nx^2} f(x)\mathrm{d}x + \sqrt{n}\int_{\delta_n}^1 \mathrm{e}^{-nx^2} f(x)\mathrm{d}x \\
&= f(\xi_n)\int_0^{\delta_n} \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x + f(\eta_n)\int_{\delta_n}^1 \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x \\
&= f(\xi_n)\int_0^{\sqrt[4]{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t + f(\eta_n)\int_{\sqrt[4]{n}}^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

其中 $0 < \xi_n < \dfrac{1}{\sqrt[4]{n}} < \eta_n < 1$.

根据 $f(x)$ 的连续性, 它在 $[0,1]$ 上是有界的, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n) = f(0)$, 于是

$$
\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2} f(x)\mathrm{d}x = f(0)\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0).
$$

例 1.3.2 设 $f(x) \in C[0,a]$, 函数 $\varphi_n(x)\ (n = 1,2,\cdots)$ 在 $[0,a]$ 上非负连续, 且对 $\forall\,\delta \in (0,a)$,$\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[\delta,a]$ 一致收敛于零, 又已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^a \varphi_n(x)\mathrm{d}x = \lambda$ (λ 为有限数), 求证

$$
\lim_{n\to\infty}\int_0^a \varphi_n(x)f(x)\mathrm{d}x = \lambda f(0).
$$

分析 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^a \varphi_n(x)\mathrm{d}x = \lambda$, 并且 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[\delta,a]$ 一致收敛于零, 故有

$$
\lim_{n\to\infty}\int_\delta^a \varphi_n(x)\mathrm{d}x = 0,
$$

于是

$$
\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \varphi_n(x)\mathrm{d}x = \lambda.
$$

由此可见, $x = 0$ 是奇异点, 于是极限值 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^a \varphi_n(x)f(x)\mathrm{d}x$ 就由 $x = 0$ 的任意小的局部 $[0,\delta]$ 所确定.

为了说明当 n 充分大时, $\left|\int_0^a \varphi_n(x)f(x)\mathrm{d}x - \lambda f(0)\right|$ 能够任意小, 需要对 $\forall\,\varepsilon > 0$ 找到相应的 N, 为此先要找到合适的 δ.

证明 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 由 $f(x)$ 的连续性可知，存在 $0 < \delta < a$, 当 $0 < x < \delta$ 时，有

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon.$$

对上述的 δ, 由非负函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[\delta, a]$ 上一致收敛于零及 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^a \varphi_n(x)\mathrm{d}x = \lambda$ 可知，存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 使得当 $n > N$ 时，有

$$0 \leqslant \int_\delta^a \varphi_n(x) < \varepsilon, \quad \left|\int_0^\delta \varphi_n(x)\mathrm{d}x - \lambda\right| < \varepsilon.$$

记 $M_1 = \max\limits_{x\in[0,a]}\{|f(x)|\}$, $M_2 = \sup\limits_{n\geqslant 1}\left\{\int_0^\delta \varphi_n(x)\mathrm{d}x\right\}$, 则当 $n > N$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^a \varphi_n(x)f(x)\mathrm{d}x - \lambda f(0)\right| \\
=&\left|\int_0^\delta \varphi_n(x)f(x)\mathrm{d}x + \int_\delta^a \varphi_n(x)f(x)\mathrm{d}x - \lambda f(0)\right| \\
\leqslant&\left|\int_0^\delta \varphi_n(x)[f(x) - f(0)]\mathrm{d}x\right| + \left|\int_\delta^a \varphi_n(x)f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_0^\delta \varphi_n(x)f(0)\mathrm{d}x - \lambda f(0)\right| \\
\leqslant&|f(\xi_n) - f(0)|\int_0^\delta \varphi_n(x)\mathrm{d}x + M_1\int_\delta^a \varphi_n(x)\mathrm{d}x + |f(0)|\left|\int_0^\delta \varphi_n(x)\mathrm{d}x - \lambda\right| \\
<&M_2\varepsilon + M_1\varepsilon + M_1\varepsilon = (2M_1 + M_2)\varepsilon,
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a \varphi_n(x)f(x)\mathrm{d}x = \lambda f(0).$$

例 1.3.3 设 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续，并在点 $x = 0$ 的右邻域内是单调的，求证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin nx}{x}f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0).$$

分析 对 $\forall\, \delta > 0$, 根据 Riemann 引理，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_\delta^\pi \frac{\sin nx}{x}f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

由此可见 $x = 0$ 是奇异点，所以只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \frac{\sin nx}{x}f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0).$$

注意到，对于固定的 $\delta > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \frac{\sin nx}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^{n\delta} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2},$$

再适当选取 δ, 结论就不难证明了.

证明 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 由 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续可知，存在 $\delta\in(0,\pi)$, 当 $0<x\leqslant\delta$ 时，有

$$0\leqslant|f(x)-f(0)|<\varepsilon,$$

于是由 $f(x)$ 在 $[0,\delta]$ 内单调 (假定 $f(x)$ 为单调增加的) 可得

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{\delta}\frac{\sin nx}{x}f(x)\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}f(0)\right|\\
=&\left|\int_0^{n\delta}\frac{\sin t}{t}f\Big(\frac{t}{n}\Big)\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}f(0)\mathrm{d}t\right|\\
\leqslant&\left|\int_0^{n\delta}\frac{\sin t}{t}f\Big(\frac{t}{n}\Big)\mathrm{d}t-\int_0^{n\delta}\frac{\sin t}{t}f(0)\mathrm{d}t\right|+|f(0)|\left|\int_{n\delta}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right|\\
=&\left|\int_0^{n\delta}\frac{\sin t}{t}\Big[f\Big(\frac{t}{n}\Big)-f(0)\Big]\mathrm{d}t\right|+|f(0)|\left|\int_{n\delta}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right|. \qquad (*)
\end{aligned}$$

对上述的 ε 及 δ, 由 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ 收敛可知，存在 $N\in\mathbb{Z}^+$, 当 $n>N$ 时，有

$$\left|\int_{n\delta}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right|<\varepsilon,$$

于是记 $M=\sup\limits_{x\geqslant0}\left\{\left|\displaystyle\int_0^{x}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right|\right\}$, 并由 $(*)$ 式和积分第二中值定理可得

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\delta}\frac{\sin nx}{x}f(x)\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}f(0)\right|&\leqslant|f(\delta)-f(0)|\left|\int_{\xi}^{n\delta}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right|+\varepsilon|f(0)|\\
&<2\varepsilon M+\varepsilon|f(0)|=(2M+|f(0)|)\varepsilon,
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{\sin nx}{x}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0).$$

再根据 Riemann 引理，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta}^{\pi}\frac{\sin nx}{x}f(x)\mathrm{d}x=0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{x}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0).$$

注 1 如果在例 1.3.3 中将 $f(x)$ 连续改为可积，其他条件不变，则结论应该为

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{a}\frac{\sin nx}{x}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0^+).$$

注 2　如果在例 1.3.3 中将 $\dfrac{\sin nx}{x}$ 换成 $\varphi_n(x)$, 而 $\varphi_n(x)$ 满足:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^\delta \varphi_n(x)\mathrm{d}x = \lambda$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_\delta^a \varphi_n(x)f(x)\mathrm{d}x = 0 \ \ (0<\delta<a)$.

此时, 结论为

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a \varphi_n(x)f(x)\mathrm{d}x = \lambda f(0).$$

可见, 例 1.3.3 是此结论的特例.

注 3　例 1.3.1 实际上是例 1.3.2 的特例, 这只要令 $\varphi_n(x)=\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx^2}$ 就可以看出, 这时 $\varphi_n(x)$ 满足:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^\delta \varphi_n(x)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_\delta^a \varphi_n(x)f(x)\mathrm{d}x = 0$;

(3) $\varphi_n(x)>0 \ \ (n=1,2,\cdots)$.

此时, 由例 1.3.2 可直接得到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2}f(x)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0).$$

例 1.3.4　设 $f(x)\in C[0,1]$, 求证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^n f(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x} = f(0).$$

证明　对每一个 $n\in\mathbb{Z}^+$, 令

$$\varphi_n(x) = \frac{(1-x^2)^n}{\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x} \quad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

则 $\varphi_n(x)\geqslant 0$, 并对 $\forall\,\delta\in(0,1)$, 由

$$0<\int_\delta^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x \leqslant \int_\delta^1(1-\delta^2)^n\mathrm{d}x = (1-\delta)(1-\delta^2)^n$$

可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\delta^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x = 0,$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^{\delta}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x}=1.$$

又由

$$\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\frac{\delta}{2}}(1-x^2)^n\mathrm{d}x\geqslant\frac{\delta}{2}\Big(1-\frac{\delta^2}{4}\Big)^n$$

可得

$$0<\frac{\displaystyle\int_\delta^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\leqslant\frac{(1-\delta^2)^n(1-\delta)}{\dfrac{\delta}{2}\Big(1-\dfrac{\delta^2}{4}\Big)^n}=\frac{2(1-\delta)}{\delta}\Big(\frac{4-4\delta^2}{4-\delta^2}\Big)^n\to 0\quad(n\to\infty),$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_\delta^1\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_\delta^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}=0.$$

根据上述已证得的结论及例 1.3.2 的结论可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\varphi_n(x)f(x)\mathrm{d}x=f(0).$$

习题 1.3

1.3.1 设 $f(x)$ 严格单调，且当 $x\in[0,1]$ 时，有 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$, 求证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1[f(x)]^n\mathrm{d}x=0.$$

1.3.2 证明下列极限成立:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x=0$;　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=0$.

1.3.3 设 $f(x)\in C[0,1]$, 求证 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx^n f(x)\mathrm{d}x=f(1)$.

1.3.4 设 $f(x)\in C[-1,1]$, 求证:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\int_{-1}^1\mathrm{e}^{-n|x|}f(x)\mathrm{d}x=2f(0)$;

(2) 若 $f(0)=0$, $f'(0)$ 存在，则 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\int_{-1}^1\mathrm{e}^{-n|x|}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=f'(0)$.

1.3.5 设 $f(x)\in C[0,1]$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0)$.

1.3.6 设 $f(x)\in C[-a,a]\ (a>0)$, 求证 $\lim\limits_{x\to 0}\int_{-a}^{a}\frac{x}{x^2+t^2}f(t)\mathrm{d}t=\pi f(0)$.

1.3.7 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的单调函数，求证:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\sin n^2x^2\mathrm{d}x=0$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\cos n^2x^2\mathrm{d}x=0$.

1.3.8 设 $f(x)$ 是 $[0,a]$ 上的单调连续函数，求证:

(1) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda}\int_0^a f(x)\sin\lambda x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}f(0)$;

(2) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\sqrt{\lambda}\int_0^a f(x)\cos\lambda x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}f(0)$.

1.3.9 设 $f(x)$ 为 $[0,a]$ 上的单调有界函数，求证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a\frac{\sin nx}{2\sin\frac{x}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0^+).$$

1.3.10 设 $f(x)\in C[0,+\infty)$, 且对 $\forall\ A>0$, 积分 $\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，求证

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}\quad(0<a<b).$$

(此积分称为 Froullani① 积分. 提示: 先考虑 $\int_\delta^A\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$, 再令 $\delta\to 0^+,\ A\to\infty$.)

1.3.11 设 $f(x)\in C[0,+\infty)$, $g(x)$ 在 $[0,l]$ 上是单调的, 并且对 $\forall\ A>0$, 积分 $\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，求证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^l\frac{f(nax)-f(nbx)}{x}\,g(x)\mathrm{d}x=f(0)g(0^+)\ln\frac{b}{a}\quad(0<a<b).$$

1.3.12 利用上题计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-nx}-\mathrm{e}^{-2nx}}{x}\cos nx\mathrm{d}x$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos nx-\cos 3nx}{x}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$.

1.4 借助辅助函数

借助辅助函数来完成命题的证明，在数学分析中是经常见到的. 构造辅助函数需要对具体的问题做具体的分析，但常见的有两类：一是把辅助函数作为从特殊到一般的过渡工具，比如，在 Rolle② 定理基础上，证明 Lagrange③ 定理和 Cauchy 定

① Froullani, 伏汝兰尼.

② Rolle, 罗尔， 1652—1719, 法国.

③ Lagrange, 拉格朗日， 1736—1813, 法国.

理时就是借助辅助函数来完成的；另一类是把要求证的命题结论中表达式的某个参数视为变量，得到一个函数，即辅助函数，通过对这个函数的研究，使命题得以证明.

例 1.4.1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可微，并且是非线性函数，求证：存在一点 $c\in[a,b]$, 使

$$|f'(c)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

分析 所要证明的结论实际上包含以下两种情形：当 $f(a)\leqslant f(b)$ 时，存在 $c_1\in(a,b)$, 使

$$f'(c_1)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a};$$

当 $f(a)\geqslant f(b)$ 时，存在 $c_2\in(a,b)$, 使

$$f'(c_2)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

这两种情形联合起来就是：存在 $c\in(a,b)$, 满足

$$|f'(c)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

我们可先考虑 $f(a)=f(b)$ 这一特例，即下面的

辅助命题 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)=0$ 且 $f(x)\not\equiv 0$, 则存在 c_1, $c_2\in(a,b)$, 使 $f'(c_1)>0$, $f'(c_2)<0$.

事实上，由 $f(x)\not\equiv 0$ 可知，存在 $x_0\in(a,b)$, 使 $f(x_0)\neq 0$, 不妨设 $f(x_0)>0$. 由 $f(x)$ 在 $[a,x_0]$ 及 $[x_0,b]$ 上分别满足 Lagrange 定理条件可知，存在 $c_1\in(a,x_0)$ 及 $c_2\in(x_0,b)$, 使得

$$f^{'}(c_1)=\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}>0,\quad f^{'}(c_2)=\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}<0.$$

为了证明例 1.4.1, 我们设想构造一个辅助函数 $\varphi(x)$, 使它满足辅助命题条件，并且其导数应当等于 $f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 这个函数还是不难想出的.

证明 作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足辅助命题的一切条件，且

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

从而存在 c_1, $c_2 \in (a,b)$, 使 $\varphi'(c_1) > 0$, $\varphi'(c_2) < 0$, 即

$$f'(c_1) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad f'(c_2) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

由此可知，存在 $c \in (a,b)$(其中 $c = c_1$ 或 $c = c_2$), 使

$$|f'(c)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

例 1.4.2 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上二次可微，且存在 $\xi \in (a,b)$, 使 $f''(\xi) \neq 0$, 求证：存在 x_1, $x_2 \in (a,b)$, 使

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}.$$

分析 先考虑 $f'(\xi) = 0$ 的特殊情形，即下面的

辅助命题 如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可微，且存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi) = 0, f''(\xi) \neq 0$, 则存在 x_1, $x_2 \in (a,b)$, 使 $f(x_1) = f(x_2)$.

事实上，不妨假定 $f''(\xi) > 0$, 并由 $f'(\xi) = 0$ 可知，ξ 是 $f(x)$ 的极小值点，于是存在 $a_1 \in (a,\xi)$, $b_1 \in (\xi,b)$, 使得 $f(a_1) > f(\xi)$, $f(b_1) > f(\xi)$.

若 $f(a_1) = f(b_1)$, 则点 a_1 与 b_1 即为所求的 x_1, x_2; 若 $f(a_1) \neq f(b_1)$, 不妨假设 $f(a_1) < f(b_1)$, 则由连续函数的介值性定理可知，存在 $x_2 \in (\xi, b_1)$, 使 $f(x_2) = f(a_1)$, 此时记 $x_1 = a_1$, 即可得到 $f(x_1) = f(x_2)$.

为了证明例 1.4.2, 需回到一般情形：$f'(\xi) \neq 0$, 我们可以构造一个辅助函数 $\varphi(x)$, 使得 $\varphi(x)$ 满足辅助命题的条件，即 $\varphi'(\xi) = 0$, $\varphi''(\xi) \neq 0$. 因此，只要作一个 $f(x)$ 与线性函数 $f'(\xi)x + C$ 之差即可，即设 $\varphi(x) = f(x) - f'(\xi)x - C$.

证明 作辅助函数

$$\varphi(x) = f(x) - f'(\xi)x \quad (a < x < b),$$

则 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 内二次可微，且

$$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - f'(\xi) = 0, \quad \varphi''(\xi) = f''(\xi) \neq 0,$$

故根据辅助命题可知，存在 x_1, $x_2 \in (a,b)$, 使得 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, 即

$$f(x_1) - f'(\xi)x_1 = f(x_2) - f'(\xi)x_2.$$

从而有

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}.$$

例 1.4.3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，求证：对任何满足条件 $\lambda > \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的常数 λ, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\frac{f(\xi)-\dfrac{f(a)+f(b)}{2}}{\xi-\dfrac{a+b}{2}}=\lambda,$$

并且 $f(x)$ 在点 $x=\xi$ 处是右连续的.

分析 为了能够建立恰当的辅助命题，我们先来分析一下本结论所代表的几何意义. 为此先把要证明的等式变形为

$$f(\xi)=\lambda\Big(\xi-\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

记 $M_1=(a,f(a))$, $M_2=(b,f(b))$, 则弦 M_1M_2 的中点坐标为 $\Big(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{f(a)+f(b)}{2}\Big)$, 其斜率为 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 因此, 从几何意义上看, 本题实际上就是要证明: 过弦 M_1M_2 的中点且斜率大于弦 M_1M_2 斜率的直线 L

$$y=\lambda\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\quad(a\leqslant x\leqslant b)$$

一定与曲线 $y=f(x)$(不一定连续) 相交.

不难看出，这里的点 $M_1=(a,f(a))$ 一定在 L 的上方，点 $M_2=(b,f(b))$ 则在 L 的下方. 这两点是十分重要的.

有了上述的几何直观解释，作为特例情形的辅助命题也就不难找到了. 实际上，我们可以把直线 L 取为 $y=x$, 而点 M_1 在 L 上方与点 M_2 在 L 下方可转化为 $a\leqslant f(a)\leqslant f(b)\leqslant b$. 在这种假定下，我们来证明曲线 $y=f(x)$ 与 L 相交. 这就是

辅助命题 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，并且 $a\leqslant f(a)\leqslant f(b)\leqslant b$, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使 $f(\xi)=\xi$, 并且 $f(x)$ 在点 $x=\xi$ 处是右连续的.

事实上，记 $E=\{x\mid x\in[a,b],\ 且\ x\leqslant f(x)\}$, 则显然有 $a\in E$, $b\notin E$, 即 E 为有界非空集合，故由确界存在定理可知，存在 ξ, 使得 $\xi=\sup E$.

下证 $f(\xi)=\xi$, 并且 $f(x)$ 在点 $x=\xi$ 处右连续.

对 $\forall\, x\in E$, 有 $x\leqslant\xi\leqslant b$, 故由 E 的定义及 $f(x)$ 的单调性，得

$$x\leqslant f(x)\leqslant f(\xi).$$

这说明 $f(\xi)$ 是 E 的一个上界，从而 $\xi\leqslant f(\xi)$, $\xi\in E$. 利用 $f(x)$ 的单调性便可得 $f(\xi)\leqslant f(f(\xi))$, 由此可知 $f(\xi)\in E$, 故 $f(\xi)$ 为 E 的上确界，从而 $f(\xi)=\xi$.

对 $\forall\, x\in(\xi,b]$, 由 $\xi=\sup E$ 及 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加可得

$$\xi=f(\xi)\leqslant f(x)<x,$$

于是根据两边夹原理可知, $\lim\limits_{x \to \xi^+} f(x)$ 存在, 且

$$\lim_{x \to \xi^+} f(x) = f(\xi),$$

即 $f(x)$ 在点 $x = \xi$ 处是右连续的.

为了完成例 1.4.3 的证明, 我们构造辅助函数 $\varphi(x)$, 使它满足辅助命题的条件, 从而有 $\varphi(\xi) = \xi$. 由于我们要证明的结论可以表示为

$$\frac{2f(\xi) - f(a) - f(b)}{2\lambda} + \frac{a+b}{2} = \xi,$$

因此, 辅助函数 $\varphi(x)$ 很自然地产生了.

证明 作辅助函数

$$\varphi(x) = \frac{2f(x) - f(a) - f(b)}{2\lambda} + \frac{a+b}{2} \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

则显然 $\varphi(x)$ 是单调增加的, 且由 $\lambda > \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} > 0$ 可得

$$\varphi(a) > \frac{f(a) - f(b)}{2} \frac{b-a}{f(b) - f(a)} + \frac{a+b}{2} = a,$$

$$\varphi(b) < \frac{f(b) - f(a)}{2} \frac{b-a}{f(b) - f(a)} + \frac{a+b}{2} = b,$$

故 $\varphi(x)$ 满足辅助命题的一切条件, 于是存在 $\xi \in [a,b]$, 使 $\varphi(\xi) = \xi$, 即

$$\frac{f(\xi) - \dfrac{f(a)+f(b)}{2}}{\xi - \dfrac{a+b}{2}} = \lambda,$$

并由 $\varphi(x)$ 在点 $x = \xi$ 处右连续以及 $\varphi(x)$ 的构成易推得 $f(x)$ 在点 $x = \xi$ 也右连续.

例 1.4.4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加, 求证

$$\int_a^b x f(x) \mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x.$$

分析 观察本题的条件与结论, 我们不难发现这一事实: 该结论对于参数 a, b 几乎没有什么限制. 由此可断定该结论对任何的 s, t $(a \leqslant s < t \leqslant b)$ 也成立, 即

$$\int_s^t x f(x) \mathrm{d}x \geqslant \frac{s+t}{2} \int_s^t f(x) \mathrm{d}x.$$

因此我们有理由把 a, b 看成变量来考虑, 比如对固定的 a, 把 b 看成变量并用 t 代替, 于是得到函数

$$\varphi(t) = \int_a^t x f(x) \mathrm{d}x - \frac{a+t}{2} \int_a^t f(x) \mathrm{d}x \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

而要证的结论则变为 $\varphi(t) \geqslant 0$. 注意到这是一个函数不等式, 我们可以充分利用微

分学或积分学中有关刻画函数性质的一些知识证明它.

证明 作辅助函数

$$\varphi(t)=\int_a^t xf(x)\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x\quad (a\leqslant t\leqslant b),$$

则由 $f(x)\in C[a,b]$ 可知， $\varphi(t)\in C^1[a,b]$, 且由 $f(x)$ 的单调增加可得

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=tf(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}f(t)=\frac{1}{2}f(t)(t-a)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_a^t f(t)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^t [f(t)-f(x)]\mathrm{d}x\geqslant 0,\end{aligned}$$

从而 $\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上是单调增加的. 由此可知，对 $\forall\, t\in[a,b]$, 有

$$\varphi(t)\geqslant\varphi(a)=0.$$

特别地， $\varphi(b)\geqslant\varphi(a)=0$, 由此即得本题结论.

习题 1.4

1.4.1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a)<f'_-(b)$, 求证：对任意满足 $f'_+(a)<\mu<f'_-(b)$ 的实数 μ, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=\mu$.

1.4.2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可微，求证：存在 $\xi\in(a,b)$, 使

$$f''(\xi)=\frac{4}{(b-a)^2}\left[f(a)-2f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f(b)\right].$$

1.4.3 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a,b) 内可微， $g(x)\neq 0$, 且

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x)\\ f'(x) & g'(x)\end{vmatrix}\equiv 0,$$

求证：存在常数 c, 使 $f(x)=cg(x)$.

1.4.4 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微，且 $f(x)+f'(x)>0$, 求证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上最多有一个零点.

1.4.5 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数，并且

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x)\\ f'(x) & g'(x)\end{vmatrix}>0,$$

求证在 $f(x)$ 的两个零点之间必有 $g(x)$ 的一个零点.

1.4.6 设 $f(x)\in C[0,2a]$, 且 $f(0)=f(2a)$, 求证：存在 $\xi\in[0,a]$, 使得 $f(\xi+a)=f(\xi)$.

1.4.7 设 $f(x) \in R[a,b]$, 且 $f(x) \geqslant 0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, 求证：存在 $\xi \in [a,b]$, 使

$$\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\xi}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

1.4.8 设 $f(x) \in C(0,+\infty)$, 且对任意两个正数 a, b, 积分 $\displaystyle\int_a^{ab} f(x)\mathrm{d}x$ 的值与 a 无关，求证：存在常数 c, 使得 $f(x) = \dfrac{c}{x}$ $(0 < x < +\infty)$.

1.4.9 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微， $g'(x) \neq 0$, 并且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A_1,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = A_2,\quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = B_1,\quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = B_2,$$

求证：存在 $\xi \in (-\infty,+\infty)$, 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{A_1 - A_2}{B_1 - B_2}$.

(提示：先考虑 $A_1 = A_2$ 的情形.)

1.4.10 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二次可微，且 $f''(x) > 0$, 求证：对 $\forall\, a < b < c$, 有

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

1.4.11 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微，求证：存在数列 $\{x_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 且

$$f'(x_n) = f(x_n)\tan x_n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

1.4.12 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上连续且有界，求证：对 $\forall\, T > 0$, 存在由 $(a,+\infty)$ 中的点构成的数列 $\{x_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 且

$$\lim_{n\to\infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0.$$

(提示：研究函数 $\varphi(x) = f(x+T) - f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内的符号变化情况.)

1.5 离散型问题与连续型问题的相互转换

数列是定义在自然数集合上的函数，我们称之为离散型变量，它与定义在区间上的连续型函数或连续型变量既有差异，又有密切联系，研究连续型变量的问题可以运用微分学和积分学等工具进行处理. 因此，常常把离散型问题转化为连续型问题进行研究. 另一方面，离散型问题形式简单，便于推证，有许多连续型问题所不具备的优越性，所以有些连续型问题又需要转换为离散型问题进行处理.

在数学分析中，数列与函数之间、求和与积分之间以及离散型不等式与连续型不等式之间都充分展示了相通性. 我们在解题的时候应当有一个转换的观念，这种转换的途径有的是直接进行变量替换，例如把 n 或 $\dfrac{1}{n}$ 换成 x, 或通过 $[x]$① 来研究连续型；有的是思路和方法的相互“移植”，例如在研究离散型问题时，可以先找出在形式上与之对应的连续型问题，假如我们有解决这个连续型问题的办法，就可以把这种解法和思路“移植”到离散型问题那里，反过来也一样.

① $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，并将 $x - [x]$ 记为 (x). 如 $[1.6] = 1$, $(1.8) = 1.8 - [1.8] = 0.8$.

例 1.5.1 设等差数列 $\{a_n\}$ 与等比数列 $\{b_n\}$ 满足：$a_0=b_0>0$, $a_N=b_N>0$, 求证 $\sum\limits_{n=0}^{N}a_n>\sum\limits_{n=0}^{N}b_n$.

分析 显然只需证明 $a_n>b_n$ $(n=1,2,\cdots,N-1)$.

令 $a_0=b_0=a$, $a_N=b_N=b$, 则 $\{a_n\}$ 的公差为 $d=\dfrac{b-a}{N}$, $\{b_n\}$ 的公比为 $q=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{N}}$, 从而有

$$a_n=a+nd,\quad b_n=aq^n\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N).$$

直接证明 $a_n>b_n$ 有一定困难, 为此我们把离散变量 n 换成连续变量 x, 考虑函数 $f(x)=a+dx$ 及 $g(x)=aq^x$, 由已知条件可知, $f(0)=g(0)=a$, $f(N)=g(N)=b$. 这样问题就转化为证明对任意的 x $(0<x<N)$, 有 $f(x)>g(x)$ 或 $f(x)-g(x)>0$, 而证明这个函数不等式可利用微分学的知识.

证明 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d,$\{b_n\}$ 的公比为 q, 则由 $a_0=b_0=a$, $a_N=b_N=b>0$ 可得

$$d=\frac{a_N-a_0}{N}=\frac{b_N-b_0}{N},\quad q=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{N}}>0.$$

作函数

$$f(x)=a_0+dx,\quad g(x)=b_0q^x\quad(0\leqslant x\leqslant N),$$

则 $f(0)=g(0)$, $f(N)=g(N)$, 且对 $\forall\, x\in(0,N)$, 由 $b_0>0$ 可得

$$f'(x)=d,\quad g'(x)=b_0q^x\ln q,\quad g''(x)=b_0q^x\ln^2 q>0,$$

从而 $g'(x)$ 在 $[0,N]$ 上严格单调增加, 并由 Lagrange 中值定理可知, 存在 $\xi\in(0,N)$, 使得

$$g'(\xi)=\frac{g(N)-g(0)}{N}=\frac{b_N-b_0}{N}=d=f'(x).$$

由上式可知, 当 $0<x\leqslant\xi$ 时, 有 $g'(x)<g'(\xi)=f'(x)$, 且由 $f(0)=g(0)$ 可得

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=[f(x)-g(x)]-[f(0)-g(0)]\\&=[f'(\eta_1)-g'(\eta_1)]x>0\quad(0<\eta_1<x\leqslant\xi);\end{aligned}$$

当 $\xi<x<N$ 时, 有 $g'(x)>g'(\xi)=f'(x)$, 且由 $f(N)=g(N)$ 可得

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=[f(x)-g(x)]-[f(N)-g(N)]\\&=[f'(\eta_2)-g'(\eta_2)](x-N)>0\quad(\xi<\eta_2<x<N).\end{aligned}$$

综上可知, 当 $x\in(0,N)$ 时, 有 $f(x)>g(x)$, 所以

$$a_n=f(n)>g(n)=b_n\quad(n=1,\ 2,\ \cdots,N-1),$$

从而由 $a_0=b_0$, $a_N=b_N$ 可得 $\sum\limits_{n=0}^{N}a_n>\sum\limits_{n=0}^{N}b_n$.

例 1.5.2 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，且 $a_n>0$, $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$, 求证：当 $p>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{s_n^p}$ 收敛.

证明 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^{p-1}}$ $(0<x<+\infty)$, 则由 $p-1>0$ 及 $a_n>0$ 可得

$$\lim_{n\to\infty}s_n=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}f(s_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^{p-1}}=0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}[f(s_k)-f(s_{k-1})]=\lim_{n\to\infty}[f(s_n)-f(s_1)]=-f(s_1),$$

即级数 $\sum\limits_{k=2}^{n}[f(s_k)-f(s_{k-1})]$ 收敛.

另一方面，对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 由 Lagrange 中值定理可知，存在 $\xi_n\in(s_{n-1},s_n)$, 使

$$\frac{f(s_n)-f(s_{n-1})}{1-p}=\frac{s_n-s_{n-1}}{\xi_n^p}=\frac{a_n}{\xi_n^p}\geqslant\frac{a_n}{s_n^p}>0\quad(n>1),$$

从而由比较判别法可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{s_n^p}$ 收敛.

例 1.5.3 设 $f(x)$ 以 T $(T>0)$ 为周期，且 $f(x)\in R[0,T]$, 求证

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

分析 因为 $f(x)$ 以 T $(T>0)$ 为周期，所以对 $\forall\, a>0$ 及 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\int_a^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x,\quad \int_0^{nT}f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x,$$

于是当 x 只取 nT 这样的实数时，由上式可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nT}\int_0^{nT}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

现在的问题是如何把这个结果推广到一般的实数 x 上去. 我们注意到当 x 取任意实数时，总存在自然数 n, 满足 $nT\leqslant x<(n+1)T$. 实际上这个 n 就是 $\left[\dfrac{x}{T}\right]$, 于是我们就把变量 x 转换为离散变量 n 了.

证明 对 $\forall\, x>0$, 存在非负整数 n_x 及 $r_x\in[0,T)$, 使得

$$n_x=\left[\frac{x}{T}\right],\quad x=n_xT+r_x,$$

于是由 $f(x)$ 的周期性可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{x}\int_0^{n_xT} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_{n_xT}^{n_xT+r_x} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{n_x}{x}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_0^{r_x} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

又因为

$$\left|\int_0^{r_x} f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{r_x} |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^T |f(t)|\mathrm{d}t,$$

所以有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^{r_x} f(t)\mathrm{d}t = 0,$$

从而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n_x\to+\infty}\frac{n_x}{Tn_x+r_x}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

从以上 3 个例子可以看出，用连续型变量处理离散型问题和用离散型变量处理连续型问题在分析证明中所起的作用. 它从一个方面展示了离散型问题与连续型问题的相互转换. 这种转换还体现在另一个方面，就是思路和方法上的相互渗透和相互“移植”，尤其是在无穷级数和无穷积分这两者的收敛性问题上. 读者可能已经发现无穷级数与无穷积分之间不仅有许多概念相似，而且有许多公式和命题的形式、证明思路和处理方法都是很相似的. 例如，微分 $\mathrm{d}y$ 与差分 Δa_n 之间，Abel 变换

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\Delta B_{k-1} = a_nB_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k\Delta a_k$$

与分部积分公式

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = uv|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u$$

之间，命题“若 $\{a_n\}$ 单调且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$”与命题“若 $f(x)$ 单调且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$”之间，等等. 这样的例子举不胜举.

如果我们掌握了这种“移植”，就可以把离散型问题中的一些结论灵活地“移植”到连续型问题中来，同样也可以把连续型问题中的一些结论“移植”到离散型问题中去.

例 1.5.4 设 $\{a_n\}$ 单调减少趋于零，且

$$b_n = a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geqslant 0 \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

求证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_n$ 收敛.

分析 题设中的 $\{b_n\}$ 实际上就是 $\{a_n\}$ 的二阶差分, 即

$$b_n=(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=\Delta a_{n+1}-\Delta a_n=\Delta^2 a_n\geqslant 0,$$

于是所求证的是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\Delta^2 a_n$ 收敛.

这个问题所对应的积分形式应该是:

设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调减少, 且

$$f''(x)\geqslant 0,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$

求证 $\displaystyle\int_a^{+\infty}xf''(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

该命题用积分方法很容易证得. 事实上, 由 $f''(x)\geqslant 0$ 及 $f(x)$ 单调减少可知, $f'(x)$ 单调增加且 $f'(x)\leqslant 0$, 又由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 可得

$$\int_a^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_a^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}f(x)-f(a)=-f(a),$$

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)=0$, 并利用分部积分公式可得

$$\int_a^{+\infty}tf''(t)\,\mathrm{d}t=tf'(t)\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty}f'(t)\,\mathrm{d}t=-af'(a)+f(a),$$

即 $\displaystyle\int_a^{+\infty}xf''(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

把上面的证法移植到级数中去, 就能得到例 1.5.4 的证明结果.

证明 由 $b_n=(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=\Delta a_{n+1}-\Delta a_n=\Delta^2 a_n\geqslant 0$ 及 $\{a_n\}$ 单调减少可知, Δa_n 单调增加且 $\Delta a_n\leqslant 0$, 又由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Delta a_n$ 收敛于 $-a_1$, 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}n\Delta a_n=0$, 并由 Abel 变换公式可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k\Delta^2 a_k&=n(\Delta a_{n+1}-\Delta a_1)-\sum_{k=1}^{n-1}(\Delta a_{k+1}-\Delta a_1)\\&=n\Delta a_{n+1}-n\Delta a_1-\sum_{k=1}^{n-1}\Delta a_{k+1}+(n-1)\Delta a_1\\&=(n+1)\Delta a_{n+1}-\Delta a_{n+1}-(a_{n+1}-a_2)-\Delta a_1\to a_1\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\Delta^2 a_n$ 收敛.

例 1.5.5 设 $\{a_n\}$ 单调减少且 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$, 求证: 若存在 $\lambda\in[0,1)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n a_{2^n}}{a_n}=\lambda,$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

分析 先把这个命题转换成积分形式，得到下面的命题：

设 $f(x)$ 单调减少，且 $f(x)>0\ (a<x<+\infty)$, 若存在 $\lambda\in[0,1)$, 使得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x f(2^x)}{f(x)}=\lambda,$$

则对 $\forall\, a\in(0,+\infty)$, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

为了证明这个命题，我们估计其有穷上限的积分. 根据换元公式可得

$$\int_a^A f(x)\mathrm{d}x=\int_{\log_2 a}^{\log_2 A} 2^t\ln 2 f(2^t)\mathrm{d}t,$$

于是由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x f(2^x)}{f(x)}=\lambda$ 可知，当 x 充分大时，有

$$\frac{2^x f(2^x)}{f(x)}<\lambda_1<1\quad(\lambda<\lambda_1<1).$$

不妨假定对一切 $x\geqslant a$, 不等式

$$2^x f(2^x)<\lambda_1 f(x)$$

成立，于是对 $\forall\, A\in(a,+\infty)$, 有

$$\int_a^A f(x)\mathrm{d}x<\ln 2\int_{\log_2 a}^{\log_2 A}\lambda_1 f(t)\mathrm{d}t<\lambda_1\ln 2\int_{\log_2 a}^{a} f(t)\mathrm{d}t+\lambda_1\ln 2\int_a^A f(t)\mathrm{d}t,$$

即有

$$(1-\lambda_1\ln 2)\int_a^A f(x)\mathrm{d}x<\lambda_1\ln 2\int_{\log_2 a}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

注意不等式右端是固定正数，且 $\lambda_1\ln 2<1$, 所以 $\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 关于 A 是上方有界，从而积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

根据上面的证明方法，我们可以得到证明例 1.5.5 的基本思路：

先把部分和 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 设法变成以 $2^k a_{2^k}$ 为项的部分和 (可以放大求和的上限数)，然后根据已知极限导出的不等式，再换回以 a_k 为一般项的部分和，由此证明部分和有上界.

证明 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n a_{2^n}}{a_n}=\lambda<1$ 可知，当 n 充分大时，有

$$2^n a_{2^n}<\lambda_1 a_n\quad(\lambda_1<1).$$

为叙述方便，不妨假定对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 不等式 $2^n a_{2^n} < \lambda_1 a_n$ 成立，于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &\leqslant \sum_{k=1}^{2^n} a_k \\ &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \cdots + a_7) + (a_8 + \cdots + a_{15}) + \cdots + a_{2^n} \\ &\leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots + 2^n a_{2^n} \\ &= a_1 + \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} < a_1 + \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} a_k.\end{aligned}$$

由上式可知，对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k < \frac{a_1}{1-\lambda_1} < +\infty,$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

习题 1.5

1.5.1 设数列 $\{a_n\}$ 满足：存在 $m \in \mathbb{Z}^+$, 使得对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 有 $a_{n+m} = a_n$, 求证

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} a_k.$$

1.5.2 设 $f(x)$ 在任意有限区间 $[0, b]$ 上可积，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, 求证

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = l.$$

1.5.3 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$ 收敛， $r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$, 求证：当 $p < 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{r_n^p}$ 收敛.

1.5.4 从已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$ 出发，导出 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$.

1.5.5 从已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 出发，导出 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.

1.5.6 设 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{mn}}{a_n} = \lambda$ (m 为某正整数), 求证：当 $\lambda < \dfrac{1}{m}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

1.5.7 设 $f(x)$ 在任意有限区间 $[a, b]\ (a > 0)$ 上可积， $\varphi'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且

$$f(x) > 0, \quad \varphi(x) > x, \quad \varphi'(x) > 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(\varphi(x))\varphi'(x)}{f(x)} = \lambda,$$

求证：当 $\lambda < 1$ 时，积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；当 $\lambda > 1$ 时，积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

由此给出一个判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_{n^2}$ 收敛的充分性条件，并加以证明.

1.5.8 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n\sin\dfrac{1}{n}}{\sin\dfrac{1}{n}}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$ $(f(0)=1,\ f'(0)=a)$.

1.5.9 求证：对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有不等式

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k}\leqslant\frac{2n^{\frac{3}{2}}}{3}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\leqslant n^{\frac{3}{2}}.$$

(提示：考察积分 $\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x$.)

1.5.10 求证：对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有不等式

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{k(k+1)}<\ln n.$$

1.5.11 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调，且满足：对于 $\forall\, x,\ y\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

求证：

(1) $f(nx)=nf(x)$ $(\forall\, n\in\mathbb{Z})$;　　(2) $f\left(\dfrac{x}{n}\right)=\dfrac{1}{n}f(x)$ $(\forall\, n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0)$;

(3) $f(rx)=rf(x)$ $(\forall\, r\in\mathbb{Q})$;　　(4) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

(5) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续；　　(6) $f(x)=f(1)x$.

1.6 ε 逼迫方法

在很多情形下，直接证明两个数 a 与 b 相等是困难的，我们常常采取这样的办法，即证明对任意 $\varepsilon>0$, 恒有 $|a-b|<\varepsilon$, 或者 $a-\varepsilon<b<a+\varepsilon$, 那么由 ε 的任意性就可以断言 $a=b$. 类似地，为了证明 $a\leqslant b$, 只要证明对 $\forall\,\varepsilon>0$, 恒有 $a\leqslant b+\varepsilon$ 或 $b\geqslant a-\varepsilon$ 就可以了. 我们把这种证明方法叫作 ε 逼迫方法，它也是数学分析中最基本和最常见的方法. 用这种方法证明两数 a 与 b 相等或不等时，常常伴随某个极限过程，ε 是与过程有关的量，而 a 与 b 则与极限过程无关，它们可以是极限值、确界等.

例 1.6.1 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的有界函数，求证

$$\sup_{[a,b]}\{f(x)+g(x)\}\geqslant\sup_{[a,b]}\{f(x)\}+\inf_{[a,b]}\{g(x)\}^{①}.$$

证明 所证不等式的两端都是确定的实数.

① $\inf\limits_{[a,b]}\{g(x)\}$ 表示数集 $\{g(x)\mid x\in[a,b]\}$ 的下确界. 数集 E 的下确界通常记为 $\inf E$.

对 $\forall\,\varepsilon>0$, 由上确界定义可知，存在 $x'\in[a,b]$, 使

$$f(x')>\sup_{[a,b]}\{f(x)\}-\varepsilon.$$

又显然有 $g(x')\geqslant\inf\limits_{[a,b]}\{g(x)\}$, 两式相加得

$$f(x')+g(x')\geqslant\sup_{[a,b]}\{f(x)\}+\inf_{[a,b]}\{g(x)\}-\varepsilon.$$

又因为

$$f(x')+g(x')\leqslant\sup_{[a,b]}\{f(x)+g(x)\},$$

所以

$$\sup_{[a,b]}\{f(x)+g(x)\}\geqslant\sup_{[a,b]}\{f(x)\}+\inf_{[a,b]}\{g(x)\}-\varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知

$$\sup_{[a,b]}\{f(x)+g(x)\}\geqslant\sup_{[a,b]}\{f(x)\}+\inf_{[a,b]}\{g(x)\}.$$

例 1.6.2 设 $f(x)\in C[a,b]$, 求证

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b|f(x)|^n\mathrm{d}x}=\max_{[a,b]}\{|f(x)|\}.$$

证明 记 $M=\max\limits_{[a,b]}\{|f(x)|\}$, 则显然有

$$\sqrt[n]{\int_a^b|f(x)|^n\mathrm{d}x}\leqslant M\sqrt[n]{b-a}\quad(n=1,2,\cdots).$$

另一方面，若设 $|f(x_0)|=M$(不失一般性，我们可以假定 $a<x_0<b$), 则对 $\forall\,\varepsilon>0$, 根据 $f(x)$ 的连续性可知，存在 $\delta>0$, 当 $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset[a,b]$ 时，恒有

$$|f(x)|\geqslant|f(x_0)|-\varepsilon=M-\varepsilon,$$

从而有

$$\sqrt[n]{\int_a^b|f(x)|^n\mathrm{d}x}\geqslant\sqrt[n]{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}|f(x)|^n\mathrm{d}x}\geqslant(M-\varepsilon)\sqrt[n]{2\delta},$$

于是

$$M-\varepsilon\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b|f(x)|^n\mathrm{d}x}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b|f(x)|^n\mathrm{d}x}\leqslant M,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b |f(x)|^n\mathrm{d}x}=M.$$

例 1.6.3 设 $f(x)$ 在任何区间 $[0,b]$ $(b>0)$ 上可积，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$, 求证

$$\lim_{t\to0^+}t\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x=l.$$

分析 由于对任意正数 A, 积分 $\displaystyle\int_A^{+\infty}t\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x$ 收敛于 e^{-tA}, 且当 x 充分大时, $f(x)$ 可控制在区间 $(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$ 之内 (其中 ε 可以是任意正数). 因此，当 $t\to0^+$ 时，$\displaystyle\int_A^{+\infty}tf(x)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x$ 亦可控制在区间 $(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$ 之内.

又因对有限积分 $\displaystyle\int_0^A tf(x)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x$ 而言，当 $t\to0^+$ 时，它显然趋于零，所以整个积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}tf(x)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x$ 值处在 $l-\varepsilon$ 与 $l+\varepsilon$ 之间 $(t\to0^+)$, 于是通过取上、下极限便可完成本例题的证明.

证明 对 $\forall\ \varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ 可知，存在 $A>0$, 当 $x\geqslant A$ 时，有 $l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon$, 从而当 $x\geqslant A$ 且 $t>0$ 时，有

$$(l-\varepsilon)t\mathrm{e}^{-tx}<tf(x)\mathrm{e}^{-tx}<(l+\varepsilon)t\mathrm{e}^{-tx}.$$

将上式两端对 x 积分得

$$(l-\varepsilon)\mathrm{e}^{-tA}\leqslant\int_A^{+\infty}tf(x)\mathrm{e}^{-tA}\mathrm{d}x\leqslant(l+\varepsilon)\mathrm{e}^{-tA},$$

于是

$$(l-\varepsilon)\leqslant\overline{\lim_{t\to0^+}}\int_A^{+\infty}tf(x)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x\leqslant(l+\varepsilon).$$

另一方面，由

$$\left|\int_0^A tf(x)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x\right|\leqslant t\int_0^A|f(x)|\mathrm{d}x$$

可得

$$\lim_{t\to0^+}\int_0^A tf(x)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x=0,$$

于是

$$\overline{\lim_{t\to0^+}}\int_0^{+\infty}tf(x)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x=\overline{\lim_{t\to0^+}}\left[\int_0^A tf(x)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x+\int_A^{+\infty}tf(x)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x\right]\leqslant l+\varepsilon.$$

同样有

$$\varliminf_{t\to 0^+} t\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x \geqslant l-\varepsilon.$$

依 ε 逼迫方法的原理 (简称 ε 逼迫原理) 可知

$$\varliminf_{t\to 0^+} t\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x = \varlimsup_{t\to 0^+} t\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-tx} = l,$$

从而

$$\lim_{t\to 0^+} t\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x = l.$$

例 1.6.4 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减少，且 $f(x)>0\ (0\leqslant x\leqslant 1)$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}_{n+1}}{d_n}=1,$$

其中 $d_n=\displaystyle\int_0^1 f(x)(1-x^2)^n\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{Z}^+$.

分析 由于对每一个 $x\in[0,1]$, 数列 $\{(1-x^2)^n\}$ 关于 n 是单调递减的，从而有 $\dfrac{d_{n+1}}{d_n}\leqslant 1\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$. 很自然想到用 ε 逼迫方法把 $\dfrac{d_{n+1}}{d_n}$ 逼迫到 1, 即要证明: 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 当 n 充分大时，有

$$1-\varepsilon<\frac{d_{n+1}}{d_n}\leqslant 1.$$

证明 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 令 $\delta=\min\left\{\sqrt{\varepsilon},\ \dfrac{1}{2}\right\}$, 则

$$\begin{aligned}\frac{d_{n+1}}{d_n} &\geqslant \frac{\displaystyle\int_0^{\delta} f(x)(1-x^2)^{n+1}\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\delta} f(x)(1-x^2)^{n}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{1} f(x)(1-x^2)^{n}\mathrm{d}x}\\ &\geqslant \frac{(1-\delta^2)\displaystyle\int_0^{\delta} f(x)(1-x^2)^{n}\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\delta} f(x)(1-x^2)^{n}\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{1} f(x)(1-x^2)^{n}\mathrm{d}x}\\ &=(1-\delta^2)\frac{1}{1+a_n}\geqslant(1-\varepsilon)\frac{1}{1+a_n},\end{aligned}$$

其中

$$a_n=\frac{\displaystyle\int_{\delta}^{1} f(x)(1-x^2)^{n}\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\delta} f(x)(1-x^2)^{n}\mathrm{d}x}\quad(n=1,2,\cdots).$$

由于

$$0 \leqslant a_n \leqslant \frac{\displaystyle\int_{\delta}^{1} f(x)(1-x^2)^n \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{0}^{\frac{\delta}{2}} f(x)(1-x^2)^n \mathrm{d}x} \leqslant \frac{f(\delta)(1-\delta^2)^n}{\dfrac{\delta}{2} f\left(\dfrac{\delta}{2}\right)\left(1-\dfrac{\delta^2}{4}\right)^n} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 所以有

$$1-\varepsilon \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{d_{n+1}}{d_n} \leqslant 1, \quad 1-\varepsilon \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{d_{n+1}}{d_n} \leqslant 1,$$

于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{d_{n+1}}{d_n} = 1,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{d_{n+1}}{d_n} = 1$.

例 1.6.5 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可微， $f(0)=0$, 且

$$|f'(x)| \leqslant |f(x)| \ (-\infty < x < +\infty),$$

求证 $f(x) \equiv 0$.

分析 只需证明对 $\forall\, x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 皆有 $f(x_0)=0$, 这样由 $f(0)=0$ 很自然想到利用 Lagrange 定理:

$$|f(x_0)| = |f(x_0) - f(0)| = |f'(\xi_1)x_0| \leqslant |f(\xi_1)||x_0|.$$

上边不等式的右端告诉我们可以继续使用中值定理，于是有

$$\begin{aligned}|f(x_0)| &\leqslant |f(\xi_1)|\cdot|x_0| \leqslant |f'(\xi_2)|\cdot|\xi_1|\cdot|x_0| \leqslant |f(\xi_2)|\cdot|\xi_1|\cdot|x_0| \\ &\leqslant \cdots \leqslant |f(\xi_n)|\cdot|\xi_{n-1}|\cdot|\xi_{n-2}|\cdots|\xi_1|\cdot|x_0| < |f(\xi_n)|\cdot|x_0|^n.\end{aligned}$$

由此可见，如果 $|x_0|<1$, 那么 $|x_0|^n$ 就会越来越小. 这使我们想到利用 ε 逼迫方法来逼迫 $f(x_0)$ 等于 0, 从而可以证得 $f(x)$ 在区间 $[0,1)$ 上恒等于零.

要使 $f(x)=0$ 的范围逐步扩大，这一点可借助辅助函数来实现.

证明 对 $\forall\, x_0 \in [0,1)$, 重复运用 Lagrange 中值定理，有

$$|f(x_0)| \leqslant |f(\xi_n)|\cdot|\xi_{n-1}|\cdots|\xi_1|\cdot|x_0| \leqslant M_0 x_0^n,$$

其中 $M_0 = \max\limits_{[0,1]}\{|f(x)|\}$.

由于 $0 \leqslant x_0 < 1$, 所以对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时，有 $x_0^n < \varepsilon$, 于是

$$|f(x_0)| \leqslant M_0\varepsilon.$$

这就证明了 $f(x_0)=0$, 即 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上恒为零. 再由 $f(x)$ 的连续性可得 $f(1)=0$.

现考虑函数 $\varphi(x)=f(x+1)$, 易见 $\varphi(0)=f(1)=0$, 且

$$|\varphi'(x)|=|f'(x+1)|\leqslant|f(x+1)|=|\varphi(x)|\quad(-\infty<x<+\infty),$$

于是由前面已证得的结论知， $\varphi(x)$ 在 $[0,1)$ 上恒为零，即 $f(x)$ 在 $[1,2)$ 上恒为零.

用这种办法还可以证明：$f(x)$ 在任何区间 $[n,n+1)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 上都恒为零，即 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒等于零.

类似地，可证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也恒为零.

例 1.6.6 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $0\leqslant a_{n+m}\leqslant a_n+a_m$, 求证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\inf\left\{\frac{a_n}{n}\right\}.$$

分析 首先由

$$a_n=a_{n-1+1}\leqslant a_{n-1}+a_1\leqslant\cdots\leqslant na_1$$

可知， $\dfrac{a_n}{n}\leqslant a_1$ $(n=1,2\cdots)$, 即数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 有界. 记 $\alpha=\inf\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$, 则对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 都有

$$\frac{a_n}{n}\geqslant\alpha.$$

为了证明数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 存在极限，还需要进一步揭示已知条件所蕴含的关于数列 $\{a_n\}$ 的性质.

对任意 m, $q\in\mathbb{Z}^+$, 反复运用已知条件 $0\leqslant a_{n+m}\leqslant a_n+a_m$ 可知

$$a_{2m}=a_{m+m}\leqslant 2a_m,\quad a_{3m}\leqslant 3a_m,\quad\cdots,\quad a_{qm}\leqslant qa_m,$$

所以，当 $n=qm$ 时，有

$$\frac{a_n}{n}\leqslant\frac{qa_m}{qm}=\frac{a_m}{m}.$$

当 n 为任意自然数且 $n>m$ 时，可把 n 表示成 $n=qm+r$, 其中 $0\leqslant r<m$, 于是

$$\frac{a_n}{n}=\frac{a_{qm+r}}{qm+r}\leqslant\frac{qa_m+a_r}{qm+r}<\frac{a_m}{m}+\frac{ra_1}{n}<\frac{a_m}{m}+\frac{m}{n}a_1.$$

这说明如果数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 中有某一项 $\dfrac{a_m}{m}$ 离 α 很近，那么只要 n 充分大， $\dfrac{a_n}{n}$ 也会离 α 很近 (m 是相对不变的数), 因此可利用 ε 逼迫方法.

证明 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 根据下确界的定义可知，存在 $m\in\mathbb{Z}^+$, 使 $\dfrac{a_m}{m}<\alpha+\varepsilon$, 从而当 n 充分大时有

$$\alpha\leqslant\frac{a_n}{n}\leqslant\frac{qa_m+a_r}{qm+r}<\frac{a_m}{m}+\frac{m}{n}a_1<\alpha+\varepsilon+\frac{m}{n}a_1.$$

于是

$$\alpha \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \alpha + \varepsilon,$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \alpha.$$

习题　1.6

1.6.1　设 A 和 B 都是实数集，　$A + B = \{x + y | x \in A, y \in B\}$, 求证：

(1)　$\inf(A+B) = \inf A + \inf B$;　　　　(2)　$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

1.6.2　设 A 与 B 都为非负数集，　$AB = \{xy | x \in A,\ y \in B\}$, 求证：

(1)　$\inf(AB) = \inf A \cdot \inf B$;　　　　(2)　$\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$.

1.6.3　设 $\varphi(x)$ 在任意有限区间 $[a,b]$ 上可积，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 1$, 求证

$$\lim_{x\to+\infty} x \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^{1+\alpha}} \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

1.6.4　求证：

(1)　$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

(2)　$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

试将本题结论与习题 1.6.1 的结论做比较.

1.6.5　设 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 均为非负数列，求证：

(1)　$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

(2)　$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

1.6.6　设 $\{a_n\}$ 为非负数列，求证：对任意 $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_{n+n_0}}.$$

1.6.7　设 $\{a_n\}$ 为有界数列，定义 $b_n = \max\{a_n,\ a_{n+1}\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 求证

$$\varlimsup_{n\to\infty} b_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n.$$

1.6.8　设 $f(x) \in C[0, +\infty)$, 且

$$0 \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{x}{n}\right) \quad (0 < x < +\infty, n = 1, 2, \cdots),$$

求证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ (l 为有限数).

1.6.9　设 $f(x) \in C(0, +\infty)$, 且对 $\forall\, x > 0$ 及 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 有 $f(x) \leqslant f(nx)$, 求证

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \quad (l \text{ 可以是 } +\infty).$$

1.6.10 设 $f(x) \in C[0,+\infty)$, 且对 $\forall\, x_1,\ x_2 \in [0,+\infty)$, 有

$$0 \leqslant f(x_1+x_2) \leqslant f(x_1)+f(x_2),$$

求证

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\inf_{x>0}\frac{f(x)}{x}.$$

1.6.11 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_m+a_n-1 \leqslant a_{m+n} \leqslant a_m+a_n+1\ (m,\ n\in\mathbb{Z}^+)$. 求证:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 存在;

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=q$, 则有 $nq-1\leqslant a_n\leqslant nq+1\ (n=1,2,\cdots)$.

1.7　借助于构造点列和抽取子列

致密性定理 (Bolzano[①] – Weierstrass[②] 定理) 的重要性是众所周知的, 利用它进行推理和论证, 常常可以使问题变得更简明、更生动一些. 在数学分析中我们经常要证明存在具有某种性质的点 (如函数的不动点, 最大值与最小值以及上、下极限等), 在用反证法证明某些问题时也常常归结为去寻找具有某种性质的点. 这时, 一个很有效的方法就是构造点列并抽取子列. 如何构造点列, 要具体问题具体分析, 主要根据证明过程中的实际需要.

例 1.7.1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义, 且满足条件:

(1) 对 $\forall\, x\in[a,b]$, 有 $a\leqslant f(x)\leqslant b$;

(2) 存在 $\lambda\in(0,1)$, 使得对 $\forall\, x',\ x''\in[a,b]$, 有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant\lambda|x'-x''|.$$

求证: 存在 $\xi\in[a,b]$, 使 $f(\xi)=\xi$.

证明 任取 $x_0\in[a,b]$, 构造点列

$$x_1=f(x_0),\quad x_2=f(x_1),\quad\cdots,\quad x_{n+1}=f(x_n),\quad\cdots,$$

则由条件 (1) 可知, $x_n\in[a,b]\ (n=0,1,2,\cdots)$, 并由条件 (2) 可得

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|\leqslant\lambda|x_n-x_{n-1}|\leqslant\cdots\leqslant\lambda^n|x_1-x_0|,$$

于是对 $\forall\, n,\ p\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&\leqslant|x_{n+p}-x_{x+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\\&\leqslant\lambda^{n+p-1}|x_1-x_0|+\lambda^{n+p-2}|x_1-x_0|+\cdots+\lambda^n|x_1-x_0|\\&=\lambda^n(1+\lambda+\cdots+\lambda^{p-1})|x_1-x_0|<\frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_1-x_0|.\end{aligned}$$

---

① Bolzano, 波尔察诺, 1781—1848, 捷克.

② Weierstrass, 魏尔斯特拉斯, 1815—1897, 德国.

由 $\lambda \in (0,1)$ 可知, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n = 0$, 所以对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 对一切 $p \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon,$$

于是根据 Cauchy 收敛原理可知, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

另一方面, 由条件 (2) 可知, $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 于是

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi).$$

例 1.7.2 用致密性定理证明: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

证明 用反证法. 假如 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非一致连续, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对 $\forall\, \delta > 0$, 存在 x', $x'' \in [a,b]$, 使得 $|x' - x''| < \delta$, 且

$$|f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon_0.$$

取 $\delta_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$, 则存在 x_n', $x_n'' \in [a,b]$, 使得 $|x_n' - x_n''| < \dfrac{1}{n}$, 且

$$|f(x_n') - f(x_n'')| \geqslant \varepsilon_0,$$

于是得到两个有界点列 $\{x_n'\}$ 及 $\{x_n''\}$.

由 $x_n' \in [a,b]$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ 及 Bolzano–Weierstrass 定理可知, 存在 $\{x_n'\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}'\}$, 即存在 $x_0 \in [a,b]$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}' = x_0,$$

并由

$$|x_{n_k}' - x_{n_k}''| < \frac{1}{n_k} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

可知, $\{x_n''\}$ 对应的子列 $\{x_{n_k}''\}$ 也收敛于 x_0, 于是由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可得

$$0 = |f(x_0) - f(x_0)| = \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'')| \geqslant \varepsilon_0,$$

这与 $\varepsilon_0 > 0$ 矛盾. 此矛盾说明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

例 1.7.3 设 $f(x)$, $f_n(x)$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ 都在 $[a,b]$ 上连续, $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 $f(x)$, 并对每一个 $x \in [a,b]$, 对应的数列 $\{f_n(x)\}$ 关于 n 是单调增加的, 求证 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

证明 用反证法. 假如 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上非一致收敛于 $f(x)$, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对 $\forall\, k \in \mathbb{Z}^+$, 存在 $n_k \in \mathbb{Z}^+$ 及 $x_{n_k} \in [a,b]$, 使得 $n_k > k$, 且

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0,$$

于是得到点列 $\{n_k\}$ 及 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$, 且

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0 \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

根据 Bolzano–Weierstrass 定理, 存在 $\{x_{n_k}\}$ 的收敛子列. 为书写方便, 不妨假定这个子列就是 $\{x_{n_k}\}$ 本身, 并由 $x_{n_k} \in [a,b]$ 可知, 存在 $x_0 \in [a,b]$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0.$$

另一方面, 由 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛于 $f(x_0)$ 可知, 对 $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon_0}{2}$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n \geqslant N$ 时, 有 $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon_1$, 特别地,

$$|f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon_1,$$

所以由 $|f_N(x) - f(x)|$ 在 x_0 点连续可得

$$\lim_{k\to\infty} |f_N(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| = |f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon_1,$$

于是当 k 充分大时, 有

$$|f_N(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| < \varepsilon_1.$$

现取定一个满足这个不等式的 x_{n_k}(同时也假定 $n_k > N$), 再根据 $f_n(x_{n_k})$ 关于 n 是单调增加的, 可得到

$$f(x_{n_k}) \geqslant f_{n_k}(x_{n_k}) \geqslant f_N(x_{n_k}),$$

从而

$$\varepsilon_0 \leqslant |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \leqslant |f_N(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| < \varepsilon_1,$$

这与 $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ 矛盾. 此矛盾说明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

例 1.7.4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义, 求证: $f(x) \in C[a,b]$ 的充分必要条件是对 $\forall\, c \in \mathbb{R}$①, 集 $\{x \mid x \in [a,b],\ f(x) \geqslant c\}$ 与 $\{x \mid x \in [a,b],\ f(x) \leqslant c\}$ 都是闭集.

证明 必要性: 对 $\forall\, c \in \mathbb{R}$, 记 $E_1 = \{x \mid x \in [a,b],\ f(x) \geqslant c\}$. 设 x_0 为 E_1 的任一聚点, 则由聚点的定义可知, 存在 E_1 中的点列 $\{x_n\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

① $\mathbb{R}$ 表示全体实数构成的集合.

于是由 $x_n \in E_1$ $(n=1,2,\cdots)$ 及 $E_1 \subset [a,b]$ 可知， $x_0 \in [a,b]$, 且

$$f(x_n) \geqslant c \quad (n=1,2,\cdots).$$

在上式中，令 $n \to \infty$, 并由 $f(x)$ 在点 x_0 处连续可得

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \geqslant c,$$

即 $x_0 \in E_1$. 因此， E_1 是闭集.

同理可知，对 $\forall\, c \in \mathbb{R}$, 集 $\{x \mid x \in [a,b],\ f(x) \leqslant c\}$ 也是闭集.

充分性：用反证法. 假如存在 $x_0 \in [a,b]$, 使得 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对 $\delta = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$, 有 $x_n \in [a,b]$, 满足 $|x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$, 且

$$|f(x_n) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0,$$

并且可以要求这些 x_n 是互不相同的. 这意味着有无穷多点 $\{x_n\}$ 或者满足

$$f(x_n) - f(x_0) \geqslant \varepsilon_0,$$

或者满足

$$f(x_n) - f(x_0) \leqslant -\varepsilon_0.$$

因此，必有 $\{x_n\}$ 的一个无穷子列满足上述两个不等式之一.

不妨设 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足 $f(x_{n_k}) - f(x_0) \geqslant \varepsilon_0$, 即

$$f(x_{n_k}) \geqslant f(x_0) + \varepsilon_0 \quad (k \in \mathbb{Z}^+),$$

则 $x_{n_k} \in \{x \mid x \in [a,b],\ f(x) \geqslant f(x_0) + \varepsilon_0\}$, 并由 $|x_{n_k} - x_0| < \dfrac{1}{n_k}$ 可得

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0.$$

但由 $f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon_0$ 可知， $x_0 \notin E$, 所以 $\{x \mid x \in [a,b],\ f(x) \geqslant f(x_0) + \varepsilon_0\}$ 不是闭集，这与已知矛盾. 此矛盾说明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

例 1.7.5 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可微，并且 $\varliminf\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, 求证

$$\varliminf_{x\to+\infty} |f'(x)| = 0.$$

证明 由 $|f'(x)| \geqslant 0$ 可知， $\varliminf\limits_{x\to+\infty} |f'(x)| \geqslant 0$, 所以只需证明：存在 $(a,+\infty)$ 中的点列 $\{x_n\}$, 使得当 $n \to \infty$ 时， $x_n \to +\infty$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} |f'(x_n)| = 0$.

任取点列 $\{a_k\}$, 使得 $a_k > a\ (k \in \mathbb{Z}^+)$, 且 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = +\infty$, 则对每一个固定的 a_k, 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ 可知，存在 $(a, +\infty)$ 中的点列 $\{b_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n)}{b_n} = 0,$$

于是对每一个固定的 a_k, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_k)}{b_n - a_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{f(b_n)}{b_n} - \dfrac{f(a_k)}{b_n}}{1 - \dfrac{a_k}{b_n}} = 0.$$

由此可知，对每一个 $a_k\ (k = 1, 2, \cdots)$, 可取充分大的 b_{n_k}, 使得 $b_{n_k} > a_k$, 且

$$\left|\frac{f(b_{n_k}) - f(a_k)}{b_{n_k} - a_k}\right| < \frac{1}{k},$$

于是由 Lagrange 中值定理可知，存在 $\xi_k \in (a_k, b_{n_k})$, 使得

$$|f'(\xi_k)| = \left|\frac{f(b_{n_k}) - f(a_k)}{b_{n_k} - a_k}\right| < \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

综上可知，存在 $(a, +\infty)$ 中的点列 $\{\xi_k\}$, 使得当 $k \to \infty$ 时， $\xi_k \to +\infty$, 且

$$\lim_{k\to\infty} |f'(\xi_k)| = 0.$$

下面我们简要介绍半连续函数.

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义， x_0 为 $[a, b]$ 内的任一点. 以前我们称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续是指对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 即

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

这说明对于在点 x_0 处连续的函数来说，它在点 x_0 附近的函数值同时受到上、下两个方面的控制. 如果仅受一个方面的限制，就是所谓的半连续函数. 确切说就是,

如果对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处是上半连续的.

相应地，如果当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处是下半连续的.

显然, $f(x)$ 在点 x_0 处上半连续相当于

$$\varlimsup_{x \to x_0} f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\text{或} \varlimsup_{x \to x_0} f(x) = -\infty);$$

$f(x)$ 在点 x_0 处下半连续相当于

$$\varliminf_{x \to x_0} f(x) \geqslant f(x_0) \quad (\text{或} \varliminf_{x \to x_0} f(x) = +\infty).$$

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的每一点都上 (下) 半连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是上 (下) 半连续的.

很明显, 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处既是上半连续的, 又是下半连续的, 那么 $f(x)$ 在该点一定是连续的.

例 1.7.6 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是上半连续的, 求证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值.

证明 先证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有上界.

事实上, 假如 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无上界, 则对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 存在 $x_n \in [a,b]$, 使得 $f(x_n) > n$, 于是由 Bolzano–Weierstrass 定理, 存在 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 即存在 $x_0 \in [a,b]$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$, 且

$$f(x_{n_k}) > n_k.$$

又由 $f(x)$ 在点 x_0 处上半连续可知, 对 $\varepsilon = 1$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$f(x) < f(x_0) + 1,$$

当 k 充分大时, 有 $|x_{n_k} - x_0| < \delta$, 于是

$$n_k < f(x_{n_k}) < f(x_0) + 1,$$

这与 $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$ 矛盾. 此矛盾说明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有上界, 从而有上确界, 即存在 $\beta \in \mathbb{R}$, 使得 $\beta = \sup\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$.

下面证明存在 $\xi \in [a,b]$, 使得 $\beta = f(\xi)$.

事实上, 由上确界的定义可知, 对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 存在 $\xi_n \in [a,b]$, 使得

$$f(\xi_n) > \beta - \frac{1}{n},$$

故由 Bolzano–Weierstrass 定理可知, 存在 $\{\xi_n\}$ 的收敛子列 $\{\xi_{n_k}\}$, 即存在 $\xi \in [a,b]$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_{n_k} = \xi$, 且

$$f(\xi_{n_k}) > \beta - \frac{1}{n_k}.$$

另一方面，由 $f(x)$ 在点 ξ 处上半连续可知，对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|x-\xi|<\delta$ 时，有

$$f(x)<f(\xi)+\varepsilon,$$

于是当 k 充分大时，有 $|\xi_{n_k}-\xi|<\delta$, 从而

$$\beta-\frac{1}{n_k}<f(\xi_{n_k})<f(\xi)+\varepsilon.$$

在上式中，令 $k\to\infty$, 得

$$\beta\leqslant f(\xi)+\varepsilon,$$

于是由 ε 逼迫原理及上确界的定义可得 $\beta=f(\xi)$.

例 1.7.7 设 $f_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上是上半连续的，并对每一个固定的 $x\in[a,b]$, 对应的数列 $\{f_n(x)\}$ 关于 n 单调减少且下方有界，求证：存在一个定义在 $[a,b]$ 上的上半连续函数 $f(x)$, 使得 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 $f(x)$.

证明 由于对每一个 $x\in[a,b]$, 对应的数列 $\{f_n(x)\}$ 关于 n 单调减少且下方有界，所以函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上处处收敛，其极限函数记为 $f(x)$, 即

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\quad(x\in[a,b]).$$

下面用反证法来证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是上半连续的.

事实上，如果存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x)$ 在点 x_0 处不是上半连续的，则存在 $\varepsilon_0>0$, 对每一个 $\delta_k=\dfrac{1}{k}\ (k\in\mathbb{Z}^+)$, 存在 $x_k\in[a,b]$, 使得 $|x_k-x_0|<\dfrac{1}{k}$, 且

$$f(x_k)\geqslant f(x_0)+\varepsilon_0,$$

于是对每一个 $x_k\in[a,b]$, 由 $f(x_k)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_k)$ 及数列 $\{f_n(x_k)\}$ 关于 n 单调减少可知，对每一个 $n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$f_n(x_k)\geqslant\lim_{n\to\infty}f_n(x_k)=f(x_k)\geqslant f(x_0)+\varepsilon_0.\tag{$*$}$$

另一方面，对每一个 $n\in\mathbb{Z}^+$, 由 $f_n(x)$ 在点 x_0 处上半连续可知，对上述 ε_0, 存在 $\delta_0>0$, 当 $|x-x_0|<\delta_0$ 时，有

$$f_n(x)<f(x_0)+\varepsilon_0,$$

于是当 k 充分大时，有

$$f_n(x_k)<f(x_0)+\varepsilon_0,$$

这与不等式 $(*)$ 矛盾. 此矛盾说明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是上半连续的.

习题 1.7

1.7.1 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且存在 $q\ (0<q<1)$, 使得对 $\forall\, x\in(-\infty,+\infty)$, 皆有 $|f'(x)|<q$, 求证：存在唯一的 $\xi\in(-\infty,+\infty)$, 使得 $f(\xi)=\xi$.

1.7.2 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $m=\sup\{|f'(x)|\}<+\infty$, 求证：对 $\forall\,\lambda>m$, 存在唯一的 $\xi\in(-\infty,+\infty)$, 使得 $f(\xi)=\lambda\xi$.

1.7.3 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可导， $f'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界，并且对 $\forall\, x\in[1,+\infty)$, 有

$$\frac{f(x)}{x}\leqslant f'(x),$$

求证：存在 $\xi\in(1,+\infty)$, 使得 $f(\xi)=\xi^2$.

1.7.4 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续有界，并且存在常数 l, 使得对 $\forall\, T>0$, 有

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+T)-f(x)]=l,$$

求证 $l=0$.

1.7.5 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续有界，且 $\inf\{f(x)\}>0$, 并对 $\forall\, a>0$, $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\dfrac{f(ax)}{f(x)}$ 存在且有限，求证函数

$$\varphi(t)=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(tx)}{f(x)}\quad(t>0)$$

在 $t=1$ 处取最小值.

1.7.6 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足：

(1) 存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)>0$;

(2) 存在 $r\ (0<r<1)$, 使得对 $\forall\, x\in[a,b]$, 有 $y\in[a,b]$, 满足不等式

$$f(y)\leqslant rf(x).$$

求证：存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=0$.

(提示：考虑 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上变号和保号两种情况．在保号时定义数列 $\{x_n\}$ 满足关系 $f(x_n)\leqslant rf(x_{n-1})$.)

1.7.7 设 $f(x)\in C[a,+\infty)$, 且 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，求证

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}}f(x)\cdot\overline{\lim_{x\to+\infty}}f(x)\leqslant 0.$$

1.7.8 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，且对 $\forall\, x_0\in[a,b]$, 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，并记

$$\varphi(x)=\lim_{t\to x}f(t),$$

求证： $\varphi(x)\in C[a,b]$, 并且对 $\forall\,\varepsilon>0$, 集 $E_\varepsilon=\{x\mid x\in[a,b],\ |f(x)-\varphi(x)|>\varepsilon\}$ 为有限集.

(提示：第二问用反证法.)

1.7.9 设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上等度连续，即对 $\forall\ x_0 \in [a,b]$ 及 $\forall\ \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时，对一切正整数 n, 都有

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon,$$

求证：如果 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于连续函数 $f(x)$, 则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

1.7.10 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是下半连续的，求证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定存在最小值.

1.7.11 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，求证：

(1) 对任意实数 c, 集 $E = \{x \mid x \in [a,b],\ f(x) \geqslant c\}$ 为闭集的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为上半连续；

(2) 对任意实数 c, 集 $E = \{x \mid x \in [a,b],\ f(x) \leqslant c\}$ 为闭集的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为下半连续.

1.8 关于利用实数空间基本定理证明问题的几点注释

实数空间是数学分析中极限理论的基础，本节对实数集和实数空间的几个基本定理及其应用做一些整理和必要的补充. 由于篇幅的限制，这里不再给出这些基本定理的证明过程，只是对它们的意义、彼此之间的关系以及如何使用等问题着重从分析角度予以简要说明.

1.8.1 有理数集的性质

有理数被定义为两个整数之比 $\dfrac{p}{q}$, 其中 $q > 0$. 为使这种表示法是唯一的，应当要求 p 与 q 互质. 如果用小数表示有理数，那么它是有限小数或无限循环小数. 有理数集 $\mathbb{Q}$ 具有以下性质：

1. 有理数集对加、减、乘、除四种运算是封闭的，它构成一个数域. 这是有理数集的代数性质.

2. 有理数集是一个全序集，即对通常“ $<$ ”这种关系满足以下四条：

(1) 对 $\forall\ a,\ b \in \mathbb{Q}$, 表达式 $a = b,\ a < b,\ b < a$ 中有且仅有一个成立；

(2) 对 $\forall\ a,\ b \in \mathbb{Q}$, 若 $a < b$, 且 $b < c$, 则 $a < c$;

(3) 对 $\forall\ a,\ b \in \mathbb{Q}$, 若 $a < b$, 则 $a + c < b + c$;

(4) 对 $\forall\ a,\ b \in \mathbb{Q}$, 若 $a < b$, 且 $c > 0$, 则 $ac < bc$.

3. 有理数集是稠密集，即对 $\forall\ a,b \in \mathbb{Q}$, 若 $a \neq b$, 则在 a 与 b 之间至少存在一个有理数 $r \in \mathbb{Q}\left(\text{如 } r = \dfrac{a+b}{2}\right)$. 因此，任意两个有理数之间存在无穷多个有理数.

4. 有理数集是不完备的，即有理数集对极限运算不封闭，或者说有理数集不是闭集. 例如，数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的极限 e 就不是有理数，这种例子是很多的.

从几何上看，这种不完备性表现在当我们用直线上的点表示有理数时，会出现许多“空隙”，因而是不连通的.

5. 有理数集是可列集 (也称可数集), 它能和自然数集建立一一对应关系，从而可排成一列，这种排法可按下列原则进行：对所有有理数 $\left\{\frac{p}{q}\right\}$, 优先将 $|p|+q$ 较小的排在前面；当 $|p|+q$ 相等时， q 小的排在前面；当 $|p|+q$ 相等，并且 q 也相等时，负数排在前面. 这样全体有理数就可排成

$$0,\ -1,\ 1,\ -2,\ 2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -3,\ 3,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \cdots.$$

有理数集的稠密性和可列性在数学分析中是很有用的. 如果理解不深，就容易犯错误，尤其在利用有限覆盖定理时应特别注意. 下面是一个因错误地使用了有限覆盖定理而证明了一个错误命题的例子.

命题 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，并且对 $[a,b]$ 上的任意有理数 r, 有 $f(r)>0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒大于零.

证明 对 $[a,b]$ 上的每一个有理数 r, 由于 $f(r)>0$ 及连续函数的保号性，存在 r 点邻域 $\Delta_r=(r-\delta_r,r+\delta_r)$, 使得 $f(x)$ 在该邻域内恒大于零.

另一方面，由有理数的稠密性可知，这些邻域的全体 $\{\Delta_r \mid r\in[a,b]\cap\mathbb{Q}\}$ 覆盖了 $[a,b]$, 故根据有限覆盖定理可知，存在有限个上述邻域 Δ_{r_1}, Δ_{r_2}, $\cdots$, Δ_{r_n}, 它们同样覆盖了 $[a,b]$, 从而由 $f(x)$ 在每个 Δ_{r_i} $(i=1,2,\cdots,n)$ 上都大于零可知， $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒大于零.

这是一个明显错误的命题 (例如：$f(r)=(r-\sqrt{2})^2>0$), 但居然能被"证明"出来，问题究竟出在哪里呢？其实错就错在忽略了有理数的可列性. 因为既然有理数是可列的，它们所对应的那些邻域也是可列的，记为

$$\Delta_{r_1},\ \Delta_{r_2},\ \cdots,\ \Delta_{r_n},\ \cdots \quad (r_n\in[a,b]\cap\mathbb{Q},\ n\in\mathbb{Z}^+),$$

而这些小邻域的长度加起来就可能小于 $b-a$. 比如第 1 个小邻域 Δ_{r_1} 的长度小于 $\frac{1}{2}(b-a)$, 第 2 个小邻域 Δ_{r_2} 的长度小于 $\frac{1}{2^2}(b-a),\cdots$, 第 n 个小邻域 Δ_{r_n} 的长度小于 $\frac{1}{2^n}(b-a),\cdots$. 这样它们的总长度就小于 $b-a$, 因此这些邻域的全体 $\{\Delta_{r_n} \mid r_n\in[a,b]\cap\mathbb{Q},\ n\in\mathbb{Z}^+\}$ 并不能覆盖住区间 $[a,b]$.

这个例子告诉我们，在利用有限覆盖定理时，必须使得那些开区间组成集族真正覆盖已知的闭区间.

1.8.2 实数集的性质

实数集 $\mathbb{R}$ 具有有理数集 $\mathbb{Q}$ 的前三条性质，即它是一个数域，并且是全序集和稠密集.

实数集和有理数集相比，其重要区别可从以下两个方面来描述：

1. 实数集对极限运算是封闭的，因此是完备的，它和直线上的点能建立一一对应关系，直线上不再有"空隙"了，所以说实数集是连通的；

2. 实数集不像有理数集那样具有可列性，它是一个不可列集，这只要证明实数集的一个子集 (比如区间 $[0,1]$ 中的所有点) 是不可列的就够了.

我们用反证法来证明这个结论. 假如 $[0,1]$ 中的所有点是可列的，记为

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots. \tag{$*$}$$

就是说，$[0,1]$ 中的每个点都包含在 $(*)$ 中，而 $(*)$ 中所有的点就是整个区间 $[0,1]$.

把 $[0,1]$ 区间分为等长的 3 个区间 $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$, $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$ 和 $\left[\dfrac{2}{3},1\right]$, 那么它们之中至少有 1 个不含有 x_1, 取定 1 个这样的闭区间并记为 Δ_1; 再把 Δ_1 分为等长的 3 个小闭区间，同样可选出 1 个小闭区间 Δ_2, 它不含有 x_2, 同时也不含有 x_1. 这种做法一直做下去，我们可得到闭区间列 $\{\Delta_n\}$, 这些闭区间满足：

(1) $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \cdots$;

(2) Δ_n 不含有 $x_1, x_2, \cdots, x_n$;

(3) Δ_n 的长度 $|\Delta_n| = \dfrac{1}{3^n} \to 0\ (n\to\infty)$.

根据区间套定理可知，存在 $\xi\in[0,1]$, 使得 $\xi \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n$.

另一方面，由 $\xi\in[0,1]$ 可知，ξ 必出现在 $(*)$ 中，即存在 N, 使 $x_N = \xi \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n$. 这与 $x_N \notin \Delta_N$ 矛盾，这种矛盾证明了 $[0,1]$ 中的点是不可列的.

在通常的数学分析教材中，描述实数完备性的定理有 7 个，它们从不同角度刻画了实数集的同一个性质. 这 7 个定理是：

1. **确界存在原理** 有上 (下) 界的实数集有唯一的上 (下) 确界.

2. **单调有界原理** 单调增加 (下降) 且上方 (下方) 有界的数列必有极限 (此原理同样适用于连续变量的情形).

3. **区间套定理** (Cantor[①] **定理**) 设有一列闭区间 $[a_n, b_n]\ (n=1,2,\cdots)$, 满足

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, 则存在唯一的一点 $\xi\in[a_n,b_n]\ (n=1,2,\cdots)$.

4. **聚点原理** (Weierstrass) 任意有界的无穷点集至少有一个聚点.

5. **致密性定理** (Bolzano–Weierstrass) 任何有界数列必有收敛子列. (如果数列只含有有限个不同的数，则其收敛子列只能是常数数列或从某一项开始为常数数列.)

6. **收敛原理** (Cauchy) 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是对 $\forall\ \varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{Z}^+$, 当 $m\geqslant n>N$ 时，有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$. (Cauchy 收敛原理对任何过程的极限都是适用的，只是表述形式有所不同.)

---

① Cantor, 康托尔， 1845—1918, 德国.

7. **有限覆盖定理** (Borel[①]) 在覆盖有界闭区间 $[a,b]$ 的任何开区间集族中，必存在有限多个开区间将 $[a,b]$ 覆盖.

上述 7 个定理是实数空间的基本定理，是建立极限理论的基础. 它们从不同角度刻画了实数集的完备性，彼此是等价的，就是说，从任何一个定理出发，都可以推证出其他 6 个定理.

这里需要提请读者注意的是，在这 7 个基本定理中，确界存在原理和单调有界原理是受空间“有序性”限制的，而其余 5 个则不然，它们在二维或二维以上的空间中仍然是有效的.

1.8.3 关于利用实数空间基本定理证明问题的几点注释

数学分析是研究函数各种性质的，这些性质又都是在一定范围内才存在的，并且与函数定义域的结构密切相关. 因此需要对不同结构的函数定义域的分析性质有所了解. 另一方面，我们在论证函数各种性质时所运用的“工具”是实数空间的基本定理，因此对这些定理的功能也应有较深入的认识.

1. 函数的性质按其存在的范围大体可分为“整体性质”和“局部性质”两种. 所谓“整体性质”是指在一个确定的区间 (可以是有穷区间或无限区间，也可以是开区间或闭区间等) 上存在的性质. 如函数的有界性、一致连续性和可积性等，都属于整体性质. 所谓“局部性质”是指在一点或一点的任意小邻域内存在的性质. 比如，函数项级数的收敛性 (逐点收敛) 就是一种局部性质，而一致收敛性则是整体性质.

众所周知，由函数的整体性质可以推出函数的局部性质，例如若函数在一个区间上一致连续，那么它一定在该区间上处处连续，等等. 反过来，由函数在各点的局部性质能否推出它在某个区间上具有相应的整体性质，则要看这个区间的结构 (比如开区间上处处连续的函数就未必在该区间上一致连续，等等). 这里，有界闭区间起着一个非常重要的作用. 这是因为有界闭区间能够保证当我们利用聚点原理或致密性定理时所找到的聚点或收敛子列的极限点仍在这个区间内. 此外，有界闭区间也是区间套定理和有限覆盖定理成立的不可缺少的条件. 有界闭区间的这些性质给我们证明函数的各种性质 (包括整体性质和局部性质) 带来极大的方便.

另一方面，通过有界区间的“逼近”，还可使函数的某些局部性质扩展到更大的范围. 比如，一个函数项级数在某开区间 (有穷或无穷) 内是内闭一致收敛的，那么它一定在该区间内处处收敛.

2. 在实数空间的 7 个基本定理中，确界存在定理、聚点原理、致密性定理和区间套定理都是用来找“点”的，即证明具有某种性质的点存在. 数学分析中有大量找点问题，如证明函数的零点存在，证明函数的最大值点、最小值点以及各种不

① Borel, 波雷尔， 1871—1956, 法国.

动点的存在等. 证明这些问题时, 使用上述 4 个定理常常是很方便的. 单调有界原理和 Cauchy 收敛原理是用来证明极限存在的, 归根结底也是用来证明点 (极限点) 存在的. 所以上述 6 个定理都是用来直接论证函数局部性质的. 有限覆盖定理则是用来直接证明函数整体性质的, 它的功能在于把函数在各点的局部性质扩展到整个闭区间上, 比如函数的有界性、一致连续性等常用有限覆盖定理直接证明.

当然, 我们这样来认识各个基本定理的功能, 并不意味着在证明函数的整体性质时一定要用有限覆盖定理, 证明函数的局部性质时一定要用其他 6 个定理. 如前所述, 既然这些基本定理彼此等价, 因此不论证明函数的整体性质或是局部性质, 利用哪个定理从原则上讲都能达到目的 (只不过有的直观些、简捷些罢了). 例如, 要证明函数的整体性质, 用有限覆盖定理就是直接论证, 而用其他定理则常常是间接论证 (即用反证法); 要证明函数局部性质, 情形则刚好相反.

下面我们列举几个例子, 着重说明基本定理的运用, 为了表明各基本定理的等价性, 有的例子中给出了多种证法.

例 1.8.1 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 求证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

证明 证法一: 直接证明 (用有限覆盖定理).

任取 $x_0\in[a,b]$, 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可知, 对于 $\varepsilon_0=1$, 存在 $\delta_0>0$, 使得当 $x\in(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)$ 时, 有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon_0=1,$$

于是可取 $M_0=1+|f(x_0)|$, 使得对 $\forall\, x\in(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)$, 有

$$|f(x)|\leqslant 1+|f(x_0)|=M_0.$$

这说明 $f(x)$ 在 x_0 点的一个小邻域 (开区间) 内是有界的 (当 x_0 为端点时可适当定义 $f(x)$ 在区间之外的值, 使 $f(x)$ 在端点附近有界).

显然, 对于 $[a,b]$ 上的每一点, 都有上述的开区间, 使 $f(x)$ 在这种开区间内有界, 而这些开区间的全体覆盖了区间 $[a,b]$. 根据有限覆盖定理, 从这些开区间中可取出有限个开区间来同样覆盖区间 $[a,b]$, 用 M 代表 $f(x)$ 在这有限个开区间上的界之最大值, 则对 $\forall\, x\in[a,b]$, 有 $|f(x)|\leqslant M$.

证法二: 反证法 (用区间套定理).

假如 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界, 将 $[a,b]$ 分为等长的两个小闭区间 $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 与 $\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$, 那么 $f(x)$ 至少在其中的一个区间上是无界的, 记这个小闭区间为 $\varDelta_1$; 再将 $\varDelta_1$ 用同样的方法等分为两个小闭区间, 再从中选出一个小闭区间, 使得 $f(x)$ 在该小区间 $\varDelta_2$ 上无界. 这种步骤可以不断地继续下去, 于是我们得到一列闭区间 $\{\varDelta_n\}$, 满足

$$\varDelta_1\supset\varDelta_2\supset\cdots\supset\varDelta_n\supset\cdots,$$

并且 $\varDelta_n$ 的长度

$$\mathrm{d}(\varDelta_n) = \frac{b-a}{2^n} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

于是由区间套定理可知，存在 $\xi \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \varDelta_n \subset [a,b]$.

另一方面，由 $f(x)$ 在点 ξ 处连续可知，存在 $\delta > 0$，使 $f(x)$ 在 $(\xi-\delta,\xi+\delta)\cap[a,b]$ 内有界；但由于 $\xi \in \varDelta_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$，且

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(\varDelta_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} 0,$$

所以当 n 充分大时，必有 $\varDelta_n \subset (\xi-\delta,\xi+\delta)\cap[a,b]$. 由此推出 $f(x)$ 在 $(\xi-\delta,\xi+\delta)\cap[a,b]$ 内有界，但在其内的一个闭子区间 $\varDelta_n$ 上无界，矛盾.

证法三：反证法 (用致密性定理).

假定 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，则对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$，存在 $x_n \in [a,b]$，使得

$$|f(x_n)| > n,$$

于是得到点列 $\{x_n\} \subset [a,b]$. 根据致密性定理，存在 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，故存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $\xi = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$，于是由 $f(x)$ 在点 ξ 处连续可得

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi).$$

另一方面，由 $|f(x_{n_k})| > n_k$ $(k \in \mathbb{Z}^+)$ 可得 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$，这与上式矛盾.

证法四：直接证明 (用确界存在定理).

由 $f(x)$ 在点 a 处右连续可知，存在 $\delta > 0$，当 $a \leqslant x \leqslant a + \delta$ 时，有

$$|f(x)| < 1 + |f(a)| = M_0,$$

这说明 $f(x)$ 在 $[a, a+\delta]$ 内是有界的，或者 $\sup\limits_{[a,a+\delta]} \{f(x)\} < +\infty$.

记

$$E = \{t \mid \sup_{[a,t]}\{f(x)\} < +\infty,\ a \leqslant t \leqslant b\},$$

则易知 E 是非空有界集，根据确界存在定理，存在常数 β，使得 $\beta = \sup E$.

显然 $\beta \leqslant b$，下证 $\beta = b$.

事实上，假如 $\beta < b$，则由 $f(x)$ 在点 β 处连续可知，存在 $\delta_1 > 0$，使 $f(x)$ 在闭区间 $[\beta-\delta_1, \beta+\delta_1] \subset [a,b]$ 内有界，从而 $\sup\limits_{[a,\beta+\delta_1]} \{|f(x)|\} < +\infty$，这与 β 为 E 的上确界矛盾.

例 1.8.2 设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上处处收敛，并且 $\{f_n'(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界，即存在 $M>0$, 对一切 $x\in[a,b]$ 及 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有 $|f_n'(x)|\leqslant M$, 求证 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证明 证法一：直接证明 (用有限覆盖定理).

设 ε 是任意给定的正数，对 $\forall\, x_0\in[a,b]$, 由 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛可知，存在 $N_0\in\mathbb{Z}^+$, 使得当 $m\geqslant n>N_0$ 时，有

$$|f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta_0=\dfrac{\varepsilon}{4M}$, 则对 $\forall\, x\in(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)$, 当 $m\geqslant n>N_0$ 时，有

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_m(x)|&\leqslant|[f_n(x)-f_m(x)]-[f_n(x_0)-f_m(x_0)]|+|f_n(x_0)-f_m(x_0)|\\&<|f_n'(\xi)-f_m'(\xi)||x-x_0|+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant 2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

由此可知，对 $[a,b]$ 上的每一点 x', 都有正整数 N' 和开区间 $(x'-\delta',x'+\delta')$, 使得对 $\forall\, x\in(x'-\delta',x'+\delta')$, 当 $m\geqslant n>N'$ 时，有

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon.$$

所有这样的开区间显然覆盖住了区间 $[a,b]$, 根据有限覆盖定理，存在其中的有限个开区间 $(x_1-\delta_1,x_1+\delta_1)$, $(x_2-\delta_2,x_2+\delta_2)$, $\cdots$, $(x_s-\delta_s,x_s+\delta_s)$, 它们同样覆盖住了 $[a,b]$, 并且对 $\forall\, x\in(x_i-\delta_i,x_i+\delta_i)$, 当 $m\geqslant n>N_i$ 时，有

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_s\}$, 则当 $m\geqslant n>N$ 时，对一切 $x\in[a,b]$, 都有

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon,$$

即 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证法二：反证法 (用致密性定理).

假如 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上非一致收敛，则存在 $\varepsilon_0>0$ 和正整数列 $\{m_k\}$, $\{n_k\}$ 及点 $x_k\in[a,b]$, 使得当 $k\to\infty$ 时， $m_k\to\infty$, $n_k\to\infty$, 且

$$|f_{n_k}(x_k)-f_{m_k}(x_k)|\geqslant\varepsilon_0\quad(k=1,2,\cdots),$$

于是得到点列 $\{x_k\}\subset[a,b]$. 根据致密性定理，存在收敛子列. 为书写方便，不妨假定这个收敛子列就是 $\{x_k\}$ 本身，记 $\xi=\lim\limits_{k\to\infty}x_k$.

设 ε 是满足条件 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ 的任意正数，由 $\{f_n(x)\}$ 在点 ξ 处收敛可知，存在 $N\in\mathbb{Z}^+$, 当 $m\geqslant n>N$ 时，有

$$|f_n(\xi)-f_m(\xi)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又由 $\xi=\lim\limits_{k\to\infty}x_k$ 可知，存在 $K\in\mathbb{Z}^+$, 使得当 $k>K$ 时，有 $|x_k-\xi|<\dfrac{\varepsilon}{4M}$, 且 $m_k>N$, $n_k>N$, 于是

$$\begin{aligned}\varepsilon_0&\leqslant|f_{n_k}(x_k)-f_{m_k}(x_k)|\\&\leqslant|[f_{n_k}(x_k)-f_{m_k}(x_k)]-[f_{n_k}(\xi)-f_{m_k}(\xi)]|+|f_{n_k}(\xi)-f_{m_k}(\xi)|\\&\leqslant|f'_{n_k}(\eta)-f'_{m_k}(\eta)||x_k-\xi|+\frac{\varepsilon}{2}<2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这与 $\varepsilon<\varepsilon_0$ 矛盾.

例 1.8.3 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的每个有理点连续，求证：至少存在 $[a,b]$ 上的一个无理点，使 $f(x)$ 在该点连续.

分析 这是一个典型的“找点”问题，可以考虑利用区间套定理把它“套住”.

我们所要找的点需要满足两个条件：第一，它必须是无理点，第二是 $f(x)$ 在该点连续. 因此，在构造区间套时应当遵循这样两条原则：

(1) 逐次排除有理点 (由于有理点是可列的，这是容易办到的);

(2) $f(x)$ 在该点的振幅应当等于零，因而必须使 $f(x)$ 在构造的各个小区间上的振幅逐次减小并趋于零.

证明 假设 $[a,b]$ 中的全部有理点已经排列成

$$r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ \cdots. \tag{$*$}$$

首先，在 $[a,b]$ 中取 $r_{n_1}\neq r_1$, 根据 $f(x)$ 在点 r_{n_1} 的连续性，可以找到 $\delta_1>0$, 满足：对 $\forall\,x\in\Delta_1=[r_{n_1}-\delta_1,r_{n_1}+\delta_1]\subset[a,b]$, 有

$$|f(x)-f(r_{n_1})|<\frac{1}{2},$$

且 $2\delta_1\leqslant\dfrac{1}{2}(b-a)$, $r_1\notin\Delta_1$.

其次，在 Δ_1 中再取 $r_{n_2}\neq r_2$, $r_{n_2}\neq r_{n_1}$, 根据 $f(x)$ 在点 r_{n_2} 的连续性，可以找到 $\delta_2>0$, 满足：对 $\forall\,x\in\Delta_2=[r_{n_2}-\delta_2,r_n+\delta_2]\subset\Delta_1$, 有

$$|f(x)-f(r_{n_2})|<\frac{1}{4},$$

且 $2\delta_2\leqslant\dfrac{1}{4}(b-a)$, r_2, r_{n_1} 均不含在 Δ_2 中.

显然按照这种办法可构造出闭区间列 $\{\Delta_n\}$, 满足:

(1) $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots \supset \Delta_k \supset \cdots$;

(2) $\mathrm{d}(\Delta_k) = 2\delta_k \leqslant \dfrac{1}{2^k}(b-a)$;

(3) 当 $x \in \Delta_k$ 时, 有 $|f(x) - f(r_{n_k})| < \dfrac{1}{2^k}$;

(4) Δ_k 中不含有 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 及 $r_{n_1}, r_{n_2}, \cdots, r_{n_{k-1}}$ $(k = 1, 2, \cdots)$.

根据区间套定理可知, 存在 $\xi \in \Delta_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$, 于是由 (1) 与 (2) 可得

$$|\xi - r_{n_k}| < \delta_k \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

先证 ξ 是无理点.

假如 ξ 是有理点, 那么它必出现在点列 $(*)$ 中, 设 $\xi = r_N$, 于是由区间套的构成可知, 当 $k \geqslant N$ 时, $r_N \notin \Delta_k$. 这与 $\xi \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_k$ 矛盾, 因此 ξ 必为无理点.

再证 $f(x)$ 在 ξ 点连续.

对 $\forall \varepsilon > 0$, 选取满足条件 $\dfrac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon$ 的正整数 k 及 $\delta = \delta_k - |\xi - r_{n_k}| > 0$, 则当 $|x - \xi| < \delta$ 时, 有

$$|x - r_{n_k}| \leqslant |x - \xi| + |\xi - r_{n_k}| < \delta + |\xi - r_{n_k}| = \delta_k,$$

于是由条件 (3) 可知, 当 $|x - \xi| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(\xi)| \leqslant |f(x) - f(r_{n_k})| + |f(r_{n_k}) - f(\xi)| < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon.$$

习题 1.8

1.8.1 用区间套定理证明实数空间的其他 6 个基本定理.

1.8.2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a) < 0 < f(b)$, 求证: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使 $f(\xi) = 0$, 且当 $x \in (\xi, b]$ 时, $f(x) > 0$.

1.8.3 用区间套定理证明: 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是上半连续的, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最大值.

1.8.4 下面的命题及其证明是否正确? 为什么?

命题 设 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 并且处处收敛于连续函数 $f(x)$, 则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

证明 设 ε 是任意给定的正数, x_0 是 $[a,b]$ 上的任意一点, 由 $f_n(x_0) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$ 可知, 存在 $N = N(\varepsilon, x_0)$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

又因为 $f_n(x)$ 及 $f(x)$ 都是连续函数，根据连续性的定义可知，存在 $\delta(x_0)>0$, 使得当 $x\in\varDelta_0=(x_0-\delta,x_0+\delta)$, 且 $n>N(\varepsilon,x_0)$ 时，有

$$|[f_n(x)-f(x)]-[f_n(x_0)-f(x_0)]|<\varepsilon.$$

从而有

$$|f_n(x)-f(x)|<2\varepsilon.$$

由于 $[a,b]$ 上的每一点都存在上述那种开区间 $\varDelta$, 而所有这些开区间显然覆盖了区间 $[a,b]$. 根据有限覆盖定理，存在有限个开区间 $\varDelta_1,\varDelta_2,\cdots,\varDelta_s$, 它们同样覆盖了区间 $[a,b]$. 在每一个这种开区间 $\varDelta_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 上，当 $n>N(\varepsilon,x_i)$ 时，都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

记 $N=\max\{N(\varepsilon,x_1),\ N(\varepsilon,x_2),\ \cdots,\ N(\varepsilon,x_s)\}$, 则当 $n>N$ 时，对 $\forall\, x\in[a,b]$, 必有满足条件 $1\leqslant i\leqslant s$ 的正整数 i, 使得 $x\in\varDelta_i$, 于是

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

这就证明了 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

1.8.5 设 $f(x)\in C[a,b]$, $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$, $m=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$ $(m<M)$, 求证：存在区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, 满足：

(1) $f(\alpha)=M$, $f(\beta)=m$ 或 $f(\alpha)=m$, $f(\beta)=M$;

(2) 当 $x\in(\alpha,\beta)$ 时， $m<f(x)<M$.

1.8.6 设 $f_n(x)\in C[a,b]$ $(n=1,2,\cdots)$, 对每个 $x\in[a,b]$, 存在 $M_x>0$, 使

$$|f_n(x)|\leqslant M_x\quad(n=1,2,\cdots).$$

求证：存在区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ 和 $M>0$, 使

$$|f_n(x)|\leqslant M\quad(\alpha\leqslant x\leqslant\beta,\ n=1,2,\cdots).$$

1.8.7 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，且在每一点处函数 $f(x)$ 有极限 (在区间的两个端点处只能有单侧极限), 求证 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是有界的.

1.8.8 设 $\{x_n\}$ 是有界数列，且任何收敛子列都有相同的极限值 a, 求证数列 $\{x_n\}$ 也以 a 为极限.

1.8.9 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 $[a,b)$ 上存在右导数 $f'_+(x)$, 求证：

(1) 若 $f(b)>f(a)$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'_+(\xi)\geqslant\dfrac{f(b)-f(a)}{2(b-a)}$;

(2) 若 $f(b)<f(a)$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'_+(\xi)\leqslant\dfrac{f(b)-f(a)}{2(b-a)}$.

(提示：作辅助函数.)

1.8.10　设 $f(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的有界连续函数，且对 $\forall\, a \in (-\infty,+\infty)$, 方程 $f(x)=a$ 在 $[0,+\infty)$ 上只有有限个根或无根，求证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

1.8.11　设 $f(x) \in C(a,b)$, 且 $f(x)$ 无极大值点，求证 $f(x)$ 只存在以下两种情况：

(1)　$f(x)$ 在 (a,b) 上单调;

(2)　存在 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f(x)$ 在 (a,x_0) 内下降，在 (x_0,b) 内上升，且 x_0 为 $f(x)$ 的最小值点.

1.8.12　设 $f(x) \in C[a,b]$, $f(a)<f(b)$, 且对 $\forall\, x \in (a,b)$, 极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

存在，求证：至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $f_s'(\xi)>0$, 其中 $f_s'(x)$ 称为 $f(x)$ 在 x 点的 Schwarz[①] 导数，即

$$f_s'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}.$$

(提示：先考虑 $f(a)<0<f(b)$ 的情形.)

① Schwarz, 许瓦尔兹， 1843—1921, 法国.

第 2 章　Abel 方法

Abel 方法是一种著名的分析技巧, 它包括 Abel 变换 (即分部求和公式) 、Abel 引理和 Abel 的级数求和法. Abel 方法是级数收敛性判别法和广义积分收敛性 (包括一致收敛性) 判别法的重要依据.

2.1　Abel 变换与 Abel 引理

设有两组数 $\{a_k\}$ 与 $\{b_k\}$ $(k=1,2,\cdots,m)$, 记 $B_k=b_1+b_2+\cdots+b_k$, 则 $b_1=B_1$, $b_2=B_2-B_1$, $\cdots$, $b_m=B_m-B_{m-1}$, 于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k&=a_1B_1+\sum_{k=2}^{m}a_k(B_k-B_{k-1})\\&=a_1B_1+\sum_{k=2}^{m}a_kB_k-\sum_{k=2}^{m}a_kB_{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{m}a_kB_k-\sum_{k=1}^{m-1}a_{k+1}B_k=a_mB_m-\sum_{k=1}^{m-1}B_k(a_{k+1}-a_k).\end{aligned}$$

这就是著名的 Abel 变换.

若令 $\Delta a_k=a_{k+1}-a_k$ $(k=1,2,\cdots,m)$ (Δa_k 称为差分), 则 Abel 变换可写成

$$\sum_{k=1}^{m}a_k\Delta B_{k-1}=a_mB_m-\sum_{k=1}^{m-1}B_k\Delta a_k\quad(\Delta B_0=b_1).$$

注意此式的形式, 它与分部积分公式很相似, 因此, Abel 变换又称为分部求和公式, 它在计算有限和时是很有用的.

例 2.1.1 计算和式 $S=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$.

解 设 $B_k=k$ $(k=1,2,\cdots,n)$, 由分部求和公式得

$$\begin{aligned}S=\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}k^2\Delta B_{k-1}&=n^2B_n-\sum_{k=1}^{n-1}B_k\Delta k^2\\&=n^3-\sum_{k=1}^{n-1}k[(k+1)^2-k^2]=n^3-2\sum_{k=1}^{n-1}k^2-\sum_{k=1}^{n-1}k\\&=n^3+2n^2-\frac{n(n-1)}{2}-2S,\end{aligned}$$

所以

$$S=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

例 2.1.2 计算和式

$$S=\sin\theta+2\sin 2\theta+\cdots+n\sin n\theta \quad (0\leqslant\theta<2\pi).$$

解 当 $\theta=0$ 时，显然有 $S=0$. 下面假定 $0<\theta<2\pi$, 并记

$$B_k=\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin k\theta=\frac{\cos\dfrac{\theta}{2}-\cos\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\dfrac{\theta}{2}} \quad (k=1,2,\cdots,n),$$

则由分部求和公式得

$$\begin{aligned}S&=\sum_{k=1}^{n}k\sin k\theta=\sum_{k=1}^{n}k\Delta B_{k-1}=nB_n-\sum_{k=1}^{n-1}B_k\\&=n\cdot\frac{\cos\dfrac{\theta}{2}-\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos\dfrac{\theta}{2}-\cos\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}\\&=\frac{\cos\dfrac{\theta}{2}-n\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}+\frac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta.\end{aligned}$$

又由于

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta&=\cos\frac{\theta}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\cos k\theta-\sin\frac{\theta}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\sin k\theta\\&=\cos\frac{\theta}{2}\left[\frac{\sin\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}-\frac{1}{2}\right]-\sin\frac{\theta}{2}\left[\frac{\cos\dfrac{\theta}{2}-\cos\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}\right]\\&=\frac{\sin n\theta}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}-\cos\frac{\theta}{2},\end{aligned}$$

将其代入到 S 的表达式中，并简化得

$$S=\frac{(n+1)\sin n\theta-n\sin(n+1)\theta}{4\sin^2\dfrac{\theta}{2}}.$$

Abel 变换除了在求和当中的应用之外, 更重要的是给出了一种对和数 $\sum\limits_{k=1}^{m}a_kb_k$ 进行估计的方法，那就是下面的 Abel 引理.

设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_m\geqslant 0$, b_1, b_2, $\cdots$, b_m 是任意一组数，记

$$B_k=\sum_{i=1}^{k}b_i \quad (k=1,2,\cdots,m),$$

若存在数 α 和 β, 满足 $\alpha \leqslant B_k \leqslant \beta\ (k=1,2,\cdots,m)$, 则由 Abel 变换可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} a_k b_k &= a_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} B_k \Delta a_k \\ &\leqslant a_m\beta + \beta\sum_{k=1}^{m-1}(a_k - a_{k+1}) = a_m\beta + \beta(a_1 - a_m) = a_1\beta.\end{aligned}$$

同理可证

$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k \geqslant a_1\alpha.$$

综上可得

$$a_1\alpha \leqslant \sum_{k=1}^{m} a_k b_k \leqslant a_1\beta.$$

这就是著名的 Abel 引理.

在上述推导过程中, 若将条件 $\alpha \leqslant B_k \leqslant \beta$ 改为 $|B_k| \leqslant M\ (k=1,2,\cdots,m)$, 则有不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right| \leqslant a_1 M.$$

若将条件 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_m \geqslant 0$ 改为 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_m$ 或 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_m$, 而条件 $|B_k| \leqslant M\ (k=1,2,\cdots,m)$ 不变, 则可得

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right| \leqslant (|a_1| + 2|a_m|)M.$$

例 2.1.3 已知有两个数列 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$, 记 $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, $\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n)$, $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n\ (n=1,2,\cdots)$.

(1) 若 $\Delta a_n \leqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 求证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\Delta a_n$ 收敛.

(2) 若 $\Delta^2 a_n \leqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n B_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}(B_1 + B_2 + \cdots + B_n)$ 均存在且有限, 求证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明 (1) 由 $\Delta a_n \leqslant 0$ 可知, $\{a_n\}$ 单调减少, 并由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (级数收敛的必要条件) 可知, $a_n \geqslant 0\ (n=1,2,\cdots)$, 于是由 Abel 变换公式可得

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot 1 = n a_n - \sum_{k=1}^{n-1} k\Delta a_k.$$

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且 $\{a_n\}$ 单调, 所以有 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$, 从而

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} k\Delta a_k = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\Delta a_n$ 收敛.

(2) 对 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$ 应用两次 Abel 变换公式可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k \Delta a_k \\ &= a_n B_n - \Delta a_{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} B_k + \sum_{k=1}^{n-2}(B_1 + B_2 + \cdots + B_k)\Delta^2 a_k \\ &= a_n B_n - (n-1)\Delta a_{n-1}\cdot\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} B_k\right) + \sum_{k=1}^{n-2}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{k}B_j\right)\cdot k\Delta^2 a_k.\end{aligned}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Delta a_n$ 收敛，再由 $\Delta^2 a_n \leqslant 0$ 及 (1) 的结论可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\Delta^2 a_n$ 绝对收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} n\Delta a_n = 0$. 根据题设可知数列 $\left\{\dfrac{B_1 + B_2 + \cdots + B_n}{n}\right\}$ 是有界的，从而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}B_j\right)\cdot n\Delta^2 a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_1 + B_2 + \cdots + B_n}{n} n\Delta^2 a_n$$

绝对收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_1 + B_2 + \cdots + B_{n-1}}{n-1}\cdot(n-1)\Delta a_{n-1} = 0,$$

于是有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \lim_{n\to\infty} a_n B_n + \sum_{n=1}^{\infty}(B_1 + B_2 + \cdots + B_n)\Delta^2 a_n,$$

因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

习题　2.1

2.1.1　设 $a_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ 为 n 的 k 次多项式，求证 $\Delta^m a_n = 0\ (m = k+1, k+2, \cdots)$.

2.1.2　设 $S(n, m) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^m\ (n,\ m = 1, 2, \cdots)$.

(1) 求证：$S(n, m)$ 有如下递推关系式：

$$(1+m)S(n, m) = n^m(n+m) - \sum_{i=1}^{m-1} C_m^{i-1} S(n-1, i),$$

其中当 $m = 1$ 时，右端第二项略去.

(2) 求出 $S(n, 3)$, $S(n, 4)$.

2.1.3　求出和式 $\cos\theta + 2\cos 2\theta + \cdots + n\cos n\theta$.

2.1.4　设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k = 0$, 并由此推证如下结论：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且 $\{a_n\}$ 单调，则 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

2.2 Abel 方法在级数收敛性判别中的应用

在本节中，我们将给出 Abel 变换公式和 Abel 引理在判别级数收敛性方面的应用，建立著名的 Abel 判别法与 Dirichlet[1] 判别法.

2.2.1 数项级数收敛性的判别法

我们先给出一个大家所熟悉的关于级数收敛性的 Cauchy 收敛原理.

定理 2.2.1 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是：对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时，对一切 $p \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon.$$

根据 Cauchy 收敛原理，要想判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 是否收敛，需要估计有限和

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k} \quad (\forall\, p \in \mathbb{Z}^+).$$

记 $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n\ (n = 1, 2, \cdots)$, 由 Abel 变换得

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k}\right| \leqslant |a_{n+p}(B_{n+p} - B_n)| + \left|\sum_{k=1}^{p-1} (B_{n+k} - B_n)(a_{n+k} - a_{n+k+1})\right|,$$

要使上面不等式的右端能够任意小 (n 充分大以后), 可通过如下的两个途径实现.

其一，若 $\{a_n\}$ 单调有界 (不妨设 $|a_n| \leqslant M$, $n = 1, 2, \cdots$), 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，根据 Cauchy 收敛原理可知，对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时，对一切 $p \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$|B_{n+p} - B_n| = |b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p}| < \varepsilon,$$

于是当 $n > N$ 时，对 $\forall\, p \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| < \varepsilon M + \varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} |a_{n+k} - a_{n+k+1}| = \varepsilon M + \varepsilon |a_{n+1} - a_{n+p}| \leqslant 3M\varepsilon.$$

从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

其二，若 $\{a_n\}$ 单调，且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 而 $\{B_n\}$ 为有界数列 (不妨设 $|B_n| \leqslant M$,$n = 1, 2, \cdots$), 根据极限的定义可知，对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时，有 $|a_n| < \varepsilon$, 于是当 $n > N$ 时，对一切 $p \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| < 2M\varepsilon + 2M \sum_{k=1}^{p-1} |a_{n+k} - a_{n+k+1}|$$

[1] Dirichlet, 狄利克雷， 1805—1859, 德国.

$$= 2M\varepsilon + 2M|a_{n+1} - a_{n+p}| \leqslant 6M\varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛原理可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

通过上述的讨论，我们分别得到了下面的

定理 2.2.2 (Abel 判别法)

设数列 $\{a_n\}$ 单调有界，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

定理 2.2.3 (Dirichlet 判别法)

设数列 $\{a_n\}$ 单调趋于零，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和数列 $\{B_n\}$ 有界，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

这两个判别法还有着如下的关系：从 Dirichlet 判别法可以推出 Abel 判别法. 事实上，由 Abel 判别法的假设可知道数列 $\{a_n\}$ 是收敛的. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 根据 Dirichlet 判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a)b_n$ 收敛，于是由

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a)b_n + a\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

例 2.2.1 设 $\{a_n\}$ 单调趋于零，求证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta$ 均收敛，其中 $0 < \theta < 2\pi$.

证明 我们仅对第一个级数给出证明，另一个级数的证明请读者参考下面的证明自己给出.

记 $b_n = \sin n\theta$, 根据恒等式

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta = \frac{\cos\dfrac{\theta}{2} - \cos\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}$$

可得

$$|B_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant \frac{2}{2\sin\dfrac{\theta}{2}} = \frac{1}{\sin\dfrac{\theta}{2}}(0 < \theta < 2\pi),$$

于是由 Dirichlet 判别法可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta$ 收敛.

例 2.2.2 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p} \sin\left(n + \dfrac{1}{n^p}\right)$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p} \cos\left(n + \dfrac{1}{n^p}\right)$ 的收敛性 $(p > 0)$.

解 先讨论第一个级数.

由三角公式可得

$$\frac{1}{n^p}\sin\left(n+\frac{1}{n^p}\right)=\frac{1}{n^p}\sin n\cos\frac{1}{n^p}+\frac{1}{n^p}\cos n\sin\frac{1}{n^p},$$

于是根据例 2.2.1 可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^p}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^p}$ 均收敛.

又因为 $\cos\frac{1}{n^p}$ 与 $\sin\frac{1}{n^p}$ 关于 n 都是单调有界的，所以由 Abel 判别法可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^p}\cos\frac{1}{n^p}$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^p}\sin\frac{1}{n^p}$ 都是收敛的，于是由级数性质可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\sin(n+\frac{1}{n^p})$ 是收敛的.

下面来讨论其绝对收敛性.

当 $p>1$ 时，两个级数显然都是绝对收敛的；当 $0<p\leqslant 1$ 时，由于

$$\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{n^p}\right)\right|}{n^p}\geqslant\frac{\sin^2\left(n+\frac{1}{n^p}\right)}{n^p}=\frac{1-\cos 2\left(n+\frac{1}{n^p}\right)}{2n^p},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}\cos 2\left(n+\frac{1}{n^p}\right)$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\left|\sin\left(n+\frac{1}{n^p}\right)\right|$ 发散，从而当 $0<p\leqslant 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\sin\left(n+\frac{1}{n^p}\right)$ 是条件收敛的.

类似可证，当 $0<p\leqslant 1$ 时，第二个级数条件收敛.

例 2.2.3 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin n}{n}$ 收敛.

证明 令 $a_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，$b_n=\sin n$，$B_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sin k\ \ (n=1,2,\cdots)$，则由例 2.2.1 可知，

$$|B_n|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{1}{2}},$$

并由收敛数列平均值的极限 (见例 1.1.7) 这一性质立即可得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

又对每一个 $n\in\mathbb{Z}^+$，有

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{n}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{k}\right)\\&=\frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{n}{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{k}\right)<0.\end{aligned}$$

综上可知，数列 $\{a_n\}$ 单调趋于零，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和数列 $\{B_n\}$ 有界，于是由 Dirichlet 判别法可知，原级数收敛.

2.2.2 函数项级数一致收敛性判别法

关于函数项级数的一致收敛性判别，也存在着类似定理 2.2.1 的 Cauchy 一致收敛原理，即

定理 2.2.4 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛的充分必要条件是：对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时，对一切 $p \in \mathbb{Z}^+$ 及 $\forall\, x \in I$, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon.$$

根据 Cauchy 一致收敛原理，仿照前一段中的讨论我们可以得到关于函数项级数一致收敛的 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法.

定理 2.2.5 (Abel 判别法)

设 $a_n(x)$, $b_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 都在区间 I 上有定义，且满足：

(1) 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 I 上一致收敛,

(2) 对每一个 $x \in I$, 对应的数列 $\{a_n(x)\}$ 单调,

(3) 函数列 $\{a_n(x)\}$ 在 I 上一致有界，即存在常数 $M > 0$, 使得对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ 及 $\forall\, x \in I$, 有

$$|a_n(x)| \leqslant M,$$

则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

定理 2.2.6 (Dirichlet 判别法)

设 $a_n(x)$, $b_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 都在区间 I 上有定义，且满足：

(1) 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 的部分和构成的函数列 $\{B_n(x)\}$ 在 I 上一致有界,

(2) 对每一个 $x \in I$, 对应的数列 $\{a_n(x)\}$ 单调,

(3) 函数列 $\{a_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于零，即对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 使得当 $n > N$ 时，对 $\forall\, x \in I$, 有

$$|a_n(x)| < \varepsilon,$$

则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

上述 3 个定理中的区间 I 可以是有限或无限区间, 也可以是开区间或闭区间, 还可以是半开半闭区间.

例 2.2.4 设数列 $\{a_n\}$ 单调趋于零，求证：对任意满足条件 $0 < \varepsilon < \pi$ 的 ε, 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 在 $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ 上一致收敛.

证明 由于 $\{a_n\}$ 与 x 无关，因而它关于 x 一致收敛于零.

又因为对 $\forall\,\varepsilon\in(0,\pi)$, 当 $x\in[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$ 时，有

$$|\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx|\leqslant\frac{2}{2\sin\dfrac{x}{2}}\leqslant\frac{1}{\sin\dfrac{\varepsilon}{2}},$$

所以由 Dirichlet 判别法知，函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ 在 $[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$ 上一致收敛.

类似地可证明，函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 在 $[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$ 上一致收敛.

思考题 如果将区间换为 $[0,2\pi]$, 以上两个函数项级数的一致收敛性如何？

例 2.2.5 求证函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

证明 令 $a_n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$, $b_n(x)=\sin x\sin nx\ (n=1,2,\cdots)$, 则对每一个 $x\in[0,+\infty)$, 对应的数列 $\{a_n(x)\}$ 关于 n 是单调减少的，并由 $|a_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 可知，函数列 $\{a_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致趋于零.

另一方面，对 $\forall\,n\in\mathbb{Z}^+$, 当 $x\in[0,+\infty)$, $x\neq 2k\pi\ (k=0,1,2,\cdots)$ 时，有

$$\begin{aligned}|B_n(x)|&=\left|\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx\right|=\frac{|\sin x|\left|\cos\dfrac{x}{2}-\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x\right|}{2\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|}\\&=\left|\cos\frac{x}{2}\right|\left|\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\leqslant 2,\end{aligned}$$

而当 $x=2k\pi$ 时， $|B_n(x)|=0$, 所以部分和函数列 $\{B_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致有界，于是由 Dirichlet 判别法可知，原函数项级数在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

例 2.2.6 讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n(1-x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的一致收敛性.

解 令 $a_n(x)=x^n(1-x)$, $b_n(x)=(-1)^{n-1}$, $B_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k(x)\ (n=1,2,\cdots)$, 则函数列 $\{B_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上是一致有界的，并且对每一个 $x\in[0,1]$, 对应的数列 $\{a_n(x)\}$ 单调减少，而利用求极值法还可证得

$$0\leqslant a_n(x)\leqslant\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\{a_n(x)\}=\left(\frac{n}{1+n}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\leqslant\frac{1}{n+1}\quad(n\in\mathbb{Z}^+),$$

故 $\{a_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致趋于零，从而由 Dirichlet 判别法可知，原函数项级数在 $[0,1]$ 上一致收敛.

注 在上面的证明中，如果令 $a_n(x)=x^n$, $b_n(x)=(-1)^{n-1}(1-x)\ (n=1,2,\cdots)$, 则部分和函数列 $\{B_n(x)\}$ 的一致有界性是显然的，但函数列 $\{a_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上非一致收敛于零，因此不能利用 Dirichlet 判别法. 由此可见，正确地分解函数项级数的一般项是很重要的，这一点应提醒读者注意.

另外，函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n(1-x)$ 还有一个有趣的现象：该级数在 $[0,1]$ 上是绝对收敛的，但不是绝对一致收敛的.

事实上，若令 $S_n(x)$ 表示 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$ 的部分和，则有

$$S_n(x)=x(1-x^n)\quad(n=1,2,\cdots),$$

于是

$$|S_{2n}(x)-S_n(x)|=x^{n+1}(1-x^n)\quad(n=1,2,\cdots).$$

由于

$$\sup_{[0,1]}|S_{2n}(x)-S_n(x)|=\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}}\left(1-\frac{n+1}{2n+1}\right)\to\frac{1}{4}\quad(n\to\infty),$$

所以由一致收敛的充分必要条件可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上非一致收敛.

习题　2.2

2.2.1　判断下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n}\ln(n+1)$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n\sin^2 n}{n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cos\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}$.

2.2.2　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，讨论下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}a_n$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n}a_n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{1}{n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n a_n$.

2.2.3　设 $\{a_n\}$ 为单调增加的有界正数数列，求证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛.

2.2.4　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$, 求证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\Delta a_n$ 收敛，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\Delta a_n=-\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

2.2.5　对数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 定义 $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\ (n=1,2,\cdots)$, 求证：

(1) 若 $\{s_n\}$ 有界，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\Delta b_n|$ 收敛，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛，且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=-\sum_{n=1}^{\infty}s_n\Delta b_n;$$

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\Delta b_n|$ 均收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 也收敛.

2.2.6 设 $\{a_n\}$ 单调减少趋于 1, 且

$$a_{n+1}^2 \leqslant a_n a_{n+2} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

求证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{a_n a_{n+2}}{a_{n+1}^2}\right)^n$ 收敛.

2.2.7 设 $\{a_n\}$ 单调减少趋于零, 存在常数 $M > 0$, 使得

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_n) \leqslant M \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

求证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\Delta a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 都收敛.

2.2.8 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$ 收敛, 求证: 对任意 $p \in \mathbb{Z}^+$, 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_{p+k}$ 收敛.

2.2.9 判断下列级数的一致收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}$, $-\infty < x < +\infty$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + \mathrm{e}^{-x}}}$, $|x| \leqslant a$.

2.2.10 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 求证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-nx}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n^{-x}$ 都在 $[0, +\infty)$ 内一致收敛.

2.2.11 试讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n (1-x)^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的一致收敛性与绝对一致收敛性.

(提示: 分别对 $\alpha > 1$ 与 $\alpha \leqslant 1$ 两种情况进行讨论).

2.3 Abel 方法在广义积分收敛性判别中的应用

2.3.1 分部积分公式与积分第二中值定理

设 $f(x)$, $g(x) \in C^1[a, b]$, 则有

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

或记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x).$$

这就是分部积分公式.

定积分中的分部积分公式在定积分计算中所起的作用是众所周知的, 同时, 它对证明某些积分恒等式与不等式也是很有用的, 它在积分中的地位相当于离散变量求和中的 Abel 变换公式, 这也可以看作是离散与连续的一种转换.

我们在第 2 章第 1 节中, 从 Abel 变换出发, 建立了 Abel 引理. 下面从分部积分公式出发来导出积分第二中值定理. 请读者注意把这里的推导过程与 Abel 引理的推导过程相对照.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少，且 $f(b)\geqslant 0$，$f'(x)$ 与 $g(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的连续函数. 令

$$G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

则由分部积分公式可得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(b)G(b)-\int_a^b G(x)f'(x)\mathrm{d}x,$$

若 $G(x)$ 满足不等式 $\alpha\leqslant G(x)\leqslant\beta$ (α,β 为常数), 则由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少可知，$f'(x)\leqslant 0$, 于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x&=f(b)G(b)-\int_a^b G(x)f'(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\beta f(b)-\beta\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\\&=\beta f(b)-\beta[f(b)-f(a)]=\beta f(a).\end{aligned}$$

类似可得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\geqslant\alpha f(a),$$

从而

$$\alpha f(a)\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\beta f(a).\tag{$*$}$$

如果把条件 $\alpha\leqslant G(x)\leqslant\beta$ 改为 $|G(x)|\leqslant M$, 上面积分不等式变为

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant Mg(a).\tag{$**$}$$

不等式 $(*)$ 实际上就是积分第二中值定理的“前身”，在许多积分估值问题中，用处比较多的正是这种积分不等式. 与 Abel 引理不同的是积分第二中值定理具有更精确的等式形式，这是因为连续变量具有介值性. 现在让我们再回到不等式 $(*)$.

若取 $\alpha=\min\limits_{[a,b]}\{G(x)\}$, $\beta=\max\limits_{[a,b]}\{G(x)\}$, 则当 $f(a)\neq 0$ 时，有

$$\min_{[a,b]}\{G(x)\}\leqslant\frac{1}{f(a)}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\max_{[a,b]}\{G(x)\},$$

于是根据连续函数 $G(x)$ 的介值性，存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{f(a)}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x.\tag{$***$}$$

若 $f(a)=0$, 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少可知，等式 $(***)$ 仍然成立 (此时 ξ 可以是 (a,b) 上任意一点). 等式 $(***)$ 就是所谓的积分第二中值定理，而积分第二中值定理还有其他表达形式. 例如，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，且 $f(a)\geqslant 0$, $f'(x)$ 与 $g(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的连续函数，则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.$$

如果只要求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，不要求其保号， $f'(x),g(x)$ 均为 $[a,b]$ 上的连续函数，则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_b^a f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.$$

应当指出的是，在上述三种形式的积分第二中值定理中，其条件可适当放宽一些. 事实上，只要 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调 (对于前两种形式还要求保号), 而 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积就够了. 对于这种情形的证明，读者可查阅通用教材，在此我们就不进行证明了.

例 2.3.1 设 $f(x)\geqslant 0$, 且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 若存在 $c\in(a,b)$, 使得 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上单调增加，在 $[c,b]$ 上单调减少，求证：存在 $\xi\in[a,c]$, $\eta\in[c,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(c)\int_\xi^\eta g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 由积分第二中值定理知，存在 $\xi\in[a,c]$, $\eta\in[c,b]$, 使得

$$\int_a^c f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(c)\int_\xi^c g(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_c^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(c)\int_c^\eta g(x)\mathrm{d}x,$$

于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x&=\int_a^c f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\\&=f(c)\int_\xi^c g(x)\mathrm{d}x+f(c)\int_c^\eta g(x)\mathrm{d}x=f(c)\int_\xi^\eta g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 2.3.2 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{n+1}^{2n}\frac{\ln(x-n)}{x}\sin x\mathrm{d}x$.

解 记 $f(x)=\dfrac{\ln(x-n)}{x}$ $(n+1\leqslant x\leqslant 2n)$, 则 $f(x)$ 在 $[n+1,2n]$ 上连续、可导，且

$$f'(x)=\frac{\dfrac{x}{x-n}-\ln(x-n)}{x^2}.$$

令 $\varphi(x)=\dfrac{x}{x-n}-\ln(x-n)\ (n+1\leqslant x\leqslant 2n)$, 则 $\varphi(x)$ 在 $[n+1,2n]$ 上连续、可导，且

$$\varphi'(x)=\frac{-n}{(x-n)^2}-\frac{1}{x-n}<0\quad(x\in[n+1,2n]),$$

于是 $\varphi(x)$ 在 $[n+1,2n]$ 上单调减少，并由

$$\varphi(2n)=2-\ln n<0<\varphi(n+1)=n+1\quad(n>8)$$

可知， $\varphi(x)$ 在 $(n+1,2n)$ 上有唯一根. 这说明 $f(x)$ 在 $[n+1,2n]$ 上有唯一的极值点，即存在 $c\in(n+1,2n)$, 使得 $f'(c)=0$, 进一步可验证

$$f(c)=\max_{[n+1,2n]}\{f(x)\},$$

并且 $f(x)$ 在 $[n+1,c]$ 上单调增加，在 $[c,2n]$ 上单调减少，从而根据例 2.3.1 的结论可知，存在 $\xi\in[n+1,c]$ 及 $\eta\in[c,2n]$, 使得

$$\int_{n+1}^{2n}\frac{\ln(x-n)}{x}\sin x\mathrm{d}x=\frac{\ln(c-n)}{c}\int_{\xi}^{\eta}\sin x\mathrm{d}x.$$

由上式可知，当 $n>8$ 时，有

$$\left|\int_{n+1}^{2n}\frac{\ln(x-n)}{x}\sin x\mathrm{d}x\right|=\frac{\ln(c-n)}{c}|\cos\eta-\cos\xi|\leqslant\frac{2\ln n}{n},$$

在上式中，令 $n\to\infty$, 得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{n+1}^{2n}\frac{\ln(x-n)}{x}\sin x\mathrm{d}x=0.$$

例 2.3.3 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^x\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t$, 且 $f(0)=0$, 求证:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=0,$$

且 $f'(0)=0$.

证明 当 $x>0$ 时，由定积分的性质及积分第二中值定理可得

$$\begin{aligned}f(2x)-f(x)&=\int_x^{2x}\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}}\frac{1}{u^2}\cos u\mathrm{d}u\\&=4x^2\int_{\frac{1}{2x}}^{\xi}\cos u\mathrm{d}u=4x^2\Big(\sin\xi-\sin\frac{1}{2x}\Big)\quad\Big(\frac{1}{2x}<\xi<\frac{1}{x}\Big),\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}4x(\sin\xi-\sin\frac{1}{2x})=0.$$

同理可证

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0.$$

综上可得

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0,$$

并由例 1.2.1 可知， $f'(0) = 0$.

例 2.3.4 设 $p < 3$, 求证 $\lim\limits_{n \to \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x^p} \sin \frac{n}{x} \mathrm{d}x = 0$.

证明 对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 利用积分变换及积分第二中值定理可得

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x^p} \sin \frac{n}{x} \mathrm{d}x &= \int_1^n t^p \cdot \sin nt \cdot \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t = \int_1^n t^{p-2} \sin nt \mathrm{d}t \\
&= 1^{p-2} \int_1^{\xi} \sin nt \mathrm{d}t + n^{p-2} \int_{\xi}^{n} \sin nt \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n}(\cos n - \cos n\xi) + n^{p-3}(\cos n\xi - \cos n^2) \quad (1 < \xi < n),
\end{aligned}$$

由条件 $p - 3 < 0$ 可得， $\lim\limits_{n \to \infty} n^{p-3} = 0$, 从而

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\sin \frac{n}{x}}{x^p} \mathrm{d}x = 0.$$

2.3.2 无穷限广义积分收敛性的 Abel 判别法与 Dirichlet 判别法

我们讨论形如 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 的无穷限广义积分之收敛性, 其中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在任意有限区间 $[a,b]$ $(b > a)$ 上都是可积的. 根据广义积分的 Cauchy 收敛原理可知, 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是: 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $A > a$, 当 $A'' > A' > A$ 时，有

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

若要判别广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 是否收敛，需对部分积分 $\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 做出估计. 由积分第二中值定理可知，当 $f(x)$ 为单调函数时，存在 $\xi \in [A', A'']$, 使得

$$\begin{aligned}
\left| \int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\mathrm{d}x \right| &= \left| f(A') \int_{A'}^{\xi} g(x)\mathrm{d}x + f(A'') \int_{\xi}^{A''} g(x)\mathrm{d}x \right| \\
&\leqslant |f(A')| \left| \int_{A'}^{\xi} g(x)\mathrm{d}x \right| + |f(A'')| \left| \int_{\xi}^{A''} g(x)\mathrm{d}x \right|.
\end{aligned}$$

现在的问题是：当 A' 充分大以后，如何使不等式的右端任意小. 下面的 Abel 判别法与 Dirichlet 判别法回答了这个问题.

定理 2.3.1 (Abel 判别法)

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $[a,+\infty)$ 上有定义，且满足：

(1) $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界,

(2) 广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,

则广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

定理 2.3.2 (Dirichlet 判别法)

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $[a,+\infty)$ 上有定义，且满足：

(1) $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$,

(2) $g(x)$ 在任何有限区间 $[a,b]$ $(b>a)$ 上可积，且 $F(x)=\displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ 有界，即存在 $M>0$, 使得对 $\forall\, x\in[a,+\infty)$, 有

$$|F(x)|=\left|\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant M,$$

则广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

例 2.3.5 设 $p>0$, 讨论广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 当 $p>1$ 时，对 $\forall\, x\in[1,+\infty)$, 有

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\leqslant\frac{1}{x^p},\quad \left|\frac{\cos x}{x^p}\right|\leqslant\frac{1}{x^p},$$

而 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 收敛，从而两个广义积分都是绝对收敛的.

当 $0<p\leqslant 1$ 时，对 $\forall\, x\in[1,+\infty)$, 有

$$\left|\int_1^x \sin t\mathrm{d}t\right|\leqslant 2,\quad \left|\int_1^x \cos t\mathrm{d}t\right|\leqslant 2,$$

而 $\dfrac{1}{x^p}$ 单调减少，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^p}=0$, 根据 Dirichlet 判别法可知，两个积分均收敛.

另一方面，当 $0<p\leqslant 1$ 时，对 $\forall\, x\in[1,+\infty)$, 有

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x^p}=\frac{1}{2x^p}-\frac{\cos 2x}{2x^p},$$

而 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散，$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛，故广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散，从而当 $0<p\leqslant 1$ 时，广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 是条件收敛的.

同理可知，当 $0 < p \leqslant 1$ 时，广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$ 也是条件收敛的.

例 2.3.6 设 $f(x)$, $g(x) \in C^1[0,+\infty)$[①] 均为有界函数，并且 $f'(x) < 0$. 如果广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，求证：

(1) 广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) 广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} g'(x)f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(x)g(x)\mathrm{d}x$ 均收敛.

证明 (1) 由 $f'(x) < 0$ 可知，$f(x)$ 单调减少，故对 $\forall\, x \in (0,+\infty)$, 有

$$\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t < xf(x) < 2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

又因广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，所以由 Cauchy 收敛原理可得

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 0,$$

从而有 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

另一方面，对 $\forall\, A > 0$, 利用分部积分公式得

$$\int_0^A xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^A - \int_0^A f(x)\mathrm{d}x = Af(A) - \int_0^A f(x)\mathrm{d}x,$$

于是由广义积分收敛的定义可得

$$\int_0^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\left[Af(A) - \int_0^A f(x)\mathrm{d}x\right] = -\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

即广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 由 (1) 中证明可知，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 并由 $g(x)$ 有界及

$$\int_0^x g'(t)\mathrm{d}t = g(x) - g(0)$$

可知，$\displaystyle\int_0^x g'(t)\mathrm{d}t$ 也有界，于是由 Dirichlet 判别法可知，$\displaystyle\int_0^{+\infty} g'(x)f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

另一方面，对 $\forall A > 0$, 由分部积分公式得

$$\int_0^A f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(A)g(A) - f(0)g(0) - \int_0^A g'(x)f(x)\mathrm{d}x,$$

① $C^k[a,b]$ 表示区间 $[a,b]$ 上具有 k ($k \in \mathbb{Z}^+$) 阶连续导数的函数全体构成的集合. 当把 $[a,b]$ 换成其他区间时，意义相同.

于是由广义积分收敛的定义可得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f'(x)g(x)\mathrm{d}x &= \lim_{A\to+\infty}\left[f(A)g(A)-f(0)g(0)-\int_0^A g'(x)f(x)\mathrm{d}x\right]\\ &= -f(0)g(0)-\int_0^{+\infty} g'(x)f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即广义积分 $\int_0^{+\infty} f'(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

2.3.3 带参变量广义积分一致收敛性的 Abel 判别法与 Dirichlet 判别法

本段我们讨论形如

$$\int_a^{+\infty} f(x,t)g(x,t)\mathrm{d}x \quad (t\in I)$$

的广义积分关于参数 t 的一致收敛性问题，类似关于函数项级数一致收敛性的讨论，我们有

定理 2.3.3 (Abel 判别法)

设 $f(x,t)$ 与 $g(x,t)$ 在 $[a,+\infty)\times I$ 上有定义，且满足：

(1) 对每一个 $t\in I, f(x,t)$ 关于 x 在 $[a,+\infty)$ 上单调，并且一致有界，即存在 $M>0$, 使得对 $\forall\, x\geqslant a$ 及 $\forall\, t\in I$, 有 $|f(x,t)|\leqslant M$,

(2) 广义积分 $\int_a^{+\infty} g(x,t)\mathrm{d}x$ 关于 t 在 I 上一致收敛,

则广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,t)g(x,t)\mathrm{d}x$ 关于 t 在 I 上一致收敛.

定理 2.3.4 (Dirichlet 判别法)

设 $f(x,t)$ 与 $g(x,t)$ 在 $[a,+\infty)\times I$ 上有定义，且满足：

(1) 对每一个 $t\in I, f(x,t)$ 关于 x 在 $[a,+\infty)$ 上单调，并且当 $x\to+\infty$ 时，$f(x,t)$ 关于 t 在 I 上一致趋于零，即对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $A>0$, 当 $x>A$ 时，对一切的 $t\in I$, 有 $|f(x,t)|<\varepsilon$,

(2) 存在 $M>0$, 使得对 $\forall\, u\geqslant a$ 及 $\forall\, t\in I$, 有

$$\left|\int_a^u g(x,t)\mathrm{d}x\right|\leqslant M,$$

则广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,t)g(x,t)\mathrm{d}x$ 关于 t 在 I 上一致收敛.

例 2.3.7 设 $a>1$, 求证广义积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\sin t\sin tx}{\sqrt{x+\sin t}}\mathrm{d}x$ 关于 t 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

证明 令 $f(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{x+\sin t}}$, $g(x,t)=\sin t\sin tx$, 则对每一个 $t\in(-\infty,+\infty)$, $f(x,t)$ 关于 x 是单调减少的，并由

$$|f(x,t)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x-1}}\to 0\quad(x\to+\infty)$$

可知，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x,t)$ 关于 t 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致趋于零.

又对 $\forall\, u\geqslant a$ 及 $\forall\, t\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$\left|\int_a^u g(x,t)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^u \sin t\sin tx\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{\sin t}{t}\right||\cos ta-\cos tu|\leqslant 2,$$

于是由 Dirichlet 判别法可知，广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\sin t\sin tx}{\sqrt{x+\sin t}}\mathrm{d}x$ 关于 t 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

例 2.3.8 讨论广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x$ 分别关于 α, β 在 $(0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

解 (1) 对固定的 $\beta>0$, 讨论广义积分关于 α 在 $(0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

因为对 $\forall\,\alpha\in(0,+\infty)$, 有

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\mathrm{e}^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x,$$

而上式右边第一个积分是常义的，所以只需讨论第二个广义积分.

因为对 $\forall\,\alpha\in(0,+\infty)$ 及 $x\in[1,+\infty)$, 有

$$\left|\mathrm{e}^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}\right|\leqslant\mathrm{e}^{-\beta x},$$

而 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x$ 关于 α 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛，于是原广义积分关于 α 在 $(0,+\infty)$ 上也一致收敛.

(2) 对固定的 $\alpha>0$, 讨论广义积分关于 β 在 $(0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

由 Dirichlet 判别法可知，广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，且与 β 无关，所以它关于 β 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛.

又对每一个 $\beta\in(0,+\infty)$,$\mathrm{e}^{-\beta x}$ 关于 x 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少，并且

$$\left|\mathrm{e}^{-\beta x}\right|\leqslant 1\quad(0<\beta<+\infty,\ 0<x<+\infty),$$

于是由 Abel 判别法可知，原广义积分关于 β 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛.

习题 2.3

2.3.1 设 $p>0$, $a>0$, 试判断下列广义积分的收敛性:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin x^p\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}(\ln x)^p\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{x-[x]-\frac{1}{2}}{x^p}\,\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\,\mathrm{d}x$.

2.3.2 设 $f(x)$ 单调减少, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 求证 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\sin^2x\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

2.3.3 求证 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{x\cos t}{t^2}\mathrm{d}t=0$.

2.3.4 设 $f(x)$ 单调减少, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 求证: 若 $f'(x)$ 连续, 则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f'(x)\sin^2x\mathrm{d}x$ 收敛.

2.3.5 判断下列含参变量广义积分在所给区间上的一致收敛性:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,\quad t\in(0,+\infty)$; (2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}x^t\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,\quad t\in[a,b]$;

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\frac{\cos x}{x^p}\,\mathrm{d}x\quad t\in[0,+\infty)$, 其中 $p>0$;

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t(1+x^2)}\sin x\mathrm{d}x,\quad t\in(0,+\infty)$.

2.3.6 讨论广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^t}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 t 在下列区间上的收敛性与一致收敛性:

(1) $t\in(0,+\infty)$; (2) $t\in(\varepsilon,+\infty)$, $\varepsilon>0$.

2.3.7 讨论广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 t 在下列区间上的收敛性与一致收敛性:

(1) $t\in[a,b]$, $0\notin[a,b]$; (2) $t\in[a,b]$, $0\in[a,b]$.

2.3.8 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{3}{2}}\int_n^{n^2}(x-n)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\sin x\mathrm{d}x$.
(提示: 参考例 2.3.2.)

2.4 Abel 级数求和法

Abel 级数求和法的依据是下面的关于幂级数连续性的 Abel 定理.

定理 2.4.1 (Abel 定理)
设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 并且

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

证明 设 $a_n(x) = a_n$, $b_n(x) = x^n$ $(n = 0, 1, \cdots)$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) b_n(x),$$

并对每一个 $x \in [0,1]$,$b_n(x)$ 单调减少且一致有界，而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛，故由 Abel 判别法可知，函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x) b_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，从而其和函数 $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0,1]$ 上连续，故

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x \to 1^-} s(x) = s(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$ ▌

利用定理 2.4.1, 我们可以对一些数项级数进行求和，具体步骤是：首先选择一个幂级数，该幂级数的系数就是所求数项级数的各项，然后利用幂级数性质 (如逐项求导与逐项积分等) 求出幂级数的和函数，最后对和函数取 $x \to 1^-$ 时的左极限.

例 2.4.1 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{3n+1} = 1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{10} + \cdots$ 的和.

解 由 Dirichlet 判别法可知，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{3n+1}$ 收敛，于是由 Abel 定理可知，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{3n+1}}{3n+1}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，其和函数记为 $s(x)$.

又由幂级数的性质可知， $s(0) = 0$, 且当 $x \in [0,1)$ 时，有

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots = \frac{1}{1+x^3},$$

所以

$$\begin{aligned} s(x) &= \int_0^x s'(t)\mathrm{d}t + s(0) = \int_0^x \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(1-x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\Big], \end{aligned}$$

于是由 Abel 定理可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+1} = \lim_{x \to 1^-} s(x) = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

例 2.4.2 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots$ 的和.

解 由 Dirichlet 判别法可验证 (见 §3.5 中例 3.5.5), 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 收敛，于是由 Abel 定理可知，级数 $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，其和函数记为 $s(x)$.

由幂级数的性质可知， $s(0)=1$, 且当 $x\in[0,1)$ 时，有

$$s'(x)=-x+\frac{1\cdot 3}{2}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4}x^5+\cdots,$$

于是 $s'(0)=0$, 并且当 $x\in(0,1)$ 时，有

$$-\frac{s'(x)}{x}=1-\frac{1\cdot 3}{2}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4}x^4+\cdots.$$

若规定 $\left.\dfrac{s'(x)}{x}\right|_{x=0}=-1$, 则 $\dfrac{s'(x)}{x}$ 在 $[0,1)$ 上连续，于是当 $x\in[0,1)$ 时，有

$$\begin{aligned}-\int_0^x\frac{s'(t)}{t}\mathrm{d}t&=x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^5-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^7+\cdots\\&=x\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\cdots\right)=xs(x).\end{aligned}$$

在上式两边对 x 求导，并整理后可得方程

$$\frac{s'(x)}{s(x)}=-\frac{x}{1+x^2},$$

再将上式从 0 到 x $(0\leqslant x<1)$ 积分，并利用 $s(0)=1$ 可得

$$\ln|s(x)|=\int_0^x\frac{s'(t)}{s(t)}\,\mathrm{d}t=-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

于是

$$s(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

最后由 Abel 定理可得

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

习题 2.4

2.4.1 求下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{1}{n}$; (2) $\dfrac{1}{2\cdot 3}-\dfrac{2}{3\cdot 4}+\dfrac{3}{4\cdot 5}-\dfrac{4}{5\cdot 6}+\cdots$;

(3) $1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\dfrac{1}{5}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\dfrac{1}{7}+\cdots$.

2.4.2 设 $a>-1$, $b>-1$, 且 $a\neq b$, 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+a)(n+b)}$ 的和.

2.4.3 求证:

(1) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots=\ln 2$; (2) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots=\dfrac{\pi}{4}$.

2.5 差分的概念及简单应用

我们在本章第 1 节中曾引入了差分 (Δa_n) 的概念，从中看到了它在处理离散变量时所起的作用. 为了使读者对差分有进一步的了解，在本节中我们将对差分作一些简单介绍，给出一些基本性质，并举几个简单的应用例子.

定义 2.5.1 对于给定的函数 $f(x)$, 称

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

为 $f(x)$ 的一阶差分，简称为差分；称

$$\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x)) \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

为 $f(x)$ 的 k 阶差分.

显然，当 x 取正整数时， $\Delta f(n)$ 就是本章第 1 节中定义的差分.

性质 2.5.1 $\Delta[k_1 f(x) + k_2 g(x)] = k_1 \Delta f(x) + k_2 \Delta g(x)$.

性质 2.5.2 $\Delta[f(x)g(x)] = f(x+1)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x)$.

性质 2.5.3 $\Delta\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x+1)}$.

证明 仅证明性质 2.5.3. 由差分的定义可得

$$\begin{aligned}\Delta\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] &= \frac{f(x+1)}{g(x+1)} - \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \frac{f(x+1)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+1)}{g(x)g(x+1)} \\ &= \frac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x+1)}.\end{aligned}$$

∎

由性质 2.5.1 可知，差分运算是线性的. 因此，差分也称为差分算子，记为 Δ, 它具有如下的常用表达式

$$\Delta = E - I$$

或

$$E = \Delta + I,$$

其中 E 称为位移算子，其具体定义为

$$Ef(x) = f(x+1),$$

I 称为恒同算子，其具体定义为

$$If(x) = f(x).$$

性质 2.5.4 对 $\forall\, k \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$E^k = I + C_k^1\Delta + \cdots + C_k^i\Delta^i + \cdots + \Delta^k.$$

证明 对 $\forall\, k \in \mathbb{Z}^+$, 利用恒等式

$$E^k f(x) = E(E^{k-1}f(x)) = (I+\Delta)E^{k-1}f(x) = E^{k-1}f(x) + \Delta(E^{k-1}f(x)),$$

并借助数学归纳法即可得证. ∎

性质 2.5.5 对 $\forall\, k \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$\begin{aligned}\Delta^k = (E-I)^k &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^i C_k^i E^{k-i}\\ &= E^k - C_k^1E^{k-1} + \cdots + (-1)^iC_k^iE^{k-i} + \cdots + (-1)^kI.\end{aligned}$$

例 2.5.1 设 $f(n)$ 为 n 的 m 次多项式, 即 $f(n) = a_0 + a_1n + \cdots + a_mn^m$, 求证: $\Delta^m f(n) = m!a_m$, $\Delta^k f(n) = 0\ (\forall\, k \in \mathbb{Z}^+,\ k \geqslant m+1)$.

证明 利用数学归纳法. 当 $m = 0$ 时, 结论显然成立. 现假定当 $m = i$ 时, 结论成立. 下证 $m = i+1$ 时, 结论仍然成立.

因为对 $\forall\, k \geqslant i+1$, 有 $k-1 \geqslant i$, 并由归纳假设可得

$$\Delta^k n^i = 0, \quad \Delta^{k-1}n^j = 0 \quad (j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ i-1),$$

所以由差分的性质可得

$$\begin{aligned}\Delta^k f(n) &= \Delta^k(a_0 + a_1n + \cdots + a_in^i) + \Delta^k(a_{i+1}n^{i+1})\\ &= a_{i+1}\Delta^k(n^{i+1}) = a_{i+1}\Delta^{k-1}[(n+1)^{i+1} - n^{i+1}]\\ &= a_{i+1}\Delta^{k-1}(1 + C_{i+1}^1n + C_{i+1}^2n^2 + \cdots + C_{i+1}^in^i)\\ &= \begin{cases}(i+1)!a_{i+1}, & k = i+1,\\ 0, & k > i+1.\end{cases}\end{aligned}$$

于是由数学归纳法可知, 原结论成立.

例 2.5.2 求证 Newton① 公式:

$$f(n) = f(0) + C_n^1\Delta f(0) + C_n^2\Delta^2 f(0) + \cdots + C_n^n\Delta^n f(0).$$

证明 注意到 $f(n) = E^nf(0) = (I+\Delta)^nf(0)$, 并利用性质 2.5.4 可得

$$f(n) = (I+\Delta)^nf(0) = f(0) + C_n^1\Delta f(0) + C_n^2\Delta^2f(0) + \cdots + C_n^n\Delta^nf(0).$$

① Newton, 牛顿, 1643—1727, 英国.

例 2.5.3 求证：对 $\forall\, n \in \mathbf{Z}^+$, 有

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = C_n^1 + 15C_n^2 + 50C_n^3 + 60C_n^4 + 24C_n^5.$$

证明 对 $\forall\, n \in \mathbf{Z}^+$, 令 $f(0) = 0$, $f(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^4$, 则由 Newton 公式可得

$$f(n) = f(0) + C_n^1 \Delta f(0) + C_n^2 \Delta^2 f(0) + \cdots + C_n^n \Delta^n f(0). \tag{$*$}$$

设 $g(i) = i^4$, 则由

$$\Delta f(i) = f(i+1) - f(i) = (i+1)^4$$

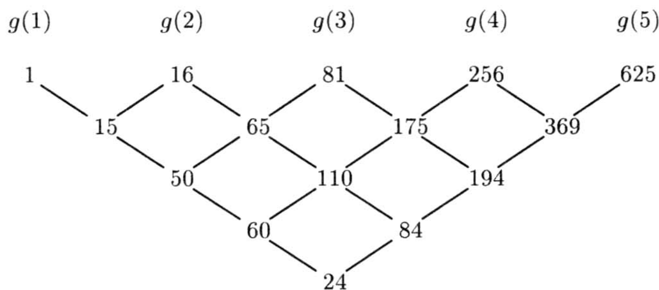
可得 $\Delta f(0) = g(1)$, 于是将其代入 $(*)$ 式，并由例 2.5.1 可得

$$f(n) = C_n^1 g(1) + C_n^2 \Delta g(1) + C_n^3 \Delta^2 g(1) + C_n^4 \Delta^3 g(1) + C_n^5 \Delta^4 g(1).$$

直接计算可得 $g(1) = 1$, $\Delta g(1) = 15$, $\Delta^2 g(1) = 50$, $\Delta^3 g(1) = 60$, $\Delta^4 g(1) = 24$, 从而

$$f(n) = C_n^1 + 15C_n^2 + 50C_n^3 + 60C_n^4 + 24C_n^5.$$

注 在本例题的推导过程中，如果将 $\Delta f(0) = f(1) - f(0) = f(1)$ 代入到 $(*)$ 式中，将导出错误结果. 这是因为 $\Delta^2 f(0) \neq \Delta f(1)$. 另外，在计算高阶差分 $\Delta^k g(1)$ 时，我们采用的方法是：



左边的斜行即为所求.

下面给出一个著名的 Euler[①] 转换公式，由于证明较长，此处略去，有兴趣的读者可查阅参考书目 [7].

定理 2.5.1 (Euler 转换公式)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f(n)$ (不必是交错级数) 收敛，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \Delta^n f(1).$$

① Euler, 欧拉， 1707—1783, 瑞士.

利用 Euler 转换公式，可以调整一些级数的收敛速度，这在数值实验中是很有用的.

例 2.5.4 试将级数 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2$ 转换成收敛较快的级数.

解 设 $f(n)=\frac{1}{n}$, 则由性质 2.5.5 可知，对 $\forall\, k\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\begin{aligned}\Delta^k f(1)&=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C_k^iE^if(1)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C_k^if(i+1)\\&=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}C_k^i\cdot\frac{1}{i+1}=\frac{(-1)^k}{(k+1)}\cdot\sum_{i=0}^{k}(-1)^iC_{k+1}^{i+1}\\&=\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)}\cdot\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^jC_{k+1}^j=\frac{(-1)^k}{(k+1)},\end{aligned}$$

于是根据 Euler 转换公式可得

$$\ln 2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}.$$

由此可见，变换后的级数收敛速度有了很大的提高.

习题 2.5

2.5.1 验证性质 2.5.1 和性质 2.5.2.

2.5.2 求证

$$\sum_{k=1}^{n}x^k=C_n^1x+C_n^2x(x-1)+C_n^3x(x-1)^2+\cdots+C_n^nx(x-1)^{n-1}.$$

2.5.3 求证 (Bernoulli[①] 求和公式)

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)=\sum_{k=1}^{n}C_n^k\Delta^{k-1}f(1).$$

2.5.4 利用习题 2.5.3 中的 Bernoulli 求和公式计算 $\sum\limits_{k=1}^{n}k^5$.

2.5.5 试证

$$\frac{7\sum\limits_{k=1}^{n}k^6+5(p+1)\sum\limits_{k=1}^{n}k^4+p\sum\limits_{k=1}^{n}k^2}{7\sum\limits_{k=1}^{n}k^6-5(p-1)\sum\limits_{k=1}^{n}k^4-p\sum\limits_{k=1}^{n}k^2}=\frac{n^2+n+p}{n^2+n-p}.$$

2.5.6 将级数 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$ 转换成收敛较快的级数.

① Bernoulli, 伯努利， 1667—1748, 瑞士.

第 3 章　不等式与估值问题

不等式在数学分析中的地位和作用是众所周知的. 数学分析是研究变量的, 因此确定变量的变化范围和变化趋势以及估计变量与变量之间的大小关系是必不可少的, 而且其处处都离不开不等式. 证明不等式和对变量进行比较精确的估计需要有相当的分析技巧, 掌握这些基本技巧对学好数学分析是十分必要的. 本章所涉及的大都是证明不等式的最基本方法和技巧, 第 1 节是初等证法, 主要对象是几种常见的有穷不等式; 鉴于凸函数对一大类不等式 (主要是各种平均值不等式) 所起的重要作用, 我们在第 2 节中简要地介绍凸函数的某些性质, 它是为后面阐述证明不等式的凸函数方法做准备的; 第 3 节和第 4 节研究如何利用微分学和积分学的知识证明不等式; 最后一节是讨论如何对变量进行估值的问题, 通过较多的例子介绍了几种估值的思路.

为了突出方法本身的作用和意义, 有的不等式在多种场合下出现, 用不同的方法给出了证明.

3.1　不等式的初等证法

我们把含有有限个变元的不等式称为有穷不等式, 许多有穷不等式可以用初等方法进行证明. 所谓初等方法是指纯粹有限的代数方法, 常见的有配方法、借助二次型理论和数学归纳法等.

例 3.1.1 求证: 对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$, 有

$$2(\sqrt{n+1}-1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1.$$

证明 当 $k \in \mathbb{Z}^+$, 且 $k \geqslant 2$ 时, 有

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}),$$
$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}),$$

于是

$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}).$$

在此不等式中, 令 $k = 2, 3, \cdots, n$ 然后相加, 得

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{2}) < \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-1).$$

将该不等式各端加上 1, 并注意到 $2\sqrt{2}<3$ 得

$$2(\sqrt{n+1}-1)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1.$$

例 3.1.2 (Cauchy 不等式)

设 a_k, b_k $(k=1,2,\cdots,n)$ 为任意实数，求证

$$\Big(\sum_{k=1}^n a_kb_k\Big)^2\leqslant\Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^n b_k^2\Big).$$

证明 方法一：借助二次型理论. 容易看出，二次型

$$\Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)x^2+\Big(2\sum_{k=1}^n a_kb_k\Big)xy+\Big(\sum_{k=1}^n b_k^2\Big)y^2=\sum_{k=1}^n(a_kx+b_ky)^2$$

是半正定的，所以它的矩阵行列式为非负的，即

$$\begin{vmatrix}\sum\limits_{k=1}^n a_k^2 & \sum\limits_{k=1}^n a_kb_k\\ \sum\limits_{k=1}^n a_kb_k & \sum\limits_{k=1}^n b_k^2\end{vmatrix}\geqslant 0,$$

从而

$$\Big(\sum_{k=1}^n a_kb_k\Big)^2\leqslant\Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^n b_k^2\Big).$$

方法二：用配方法.

$$\Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^n b_k^2\Big)=\Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^n b_j^2\Big)=\sum_{k,j=1}^n a_k^2b_j^2=\sum_{k,j=1}^n a_j^2b_k^2,$$

$$\Big(\sum_{k=1}^n a_kb_k\Big)^2=\Big(\sum_{k=1}^n a_kb_k\Big)\Big(\sum_{j=1}^n a_jb_j\Big)=\sum_{k,j=1}^n a_kb_ja_jb_k,$$

由上述等式可得

$$\begin{aligned}2\Big[\Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^n b_k^2\Big)-\Big(\sum_{k=1}^n a_kb_k\Big)^2\Big]&=\sum_{k,j=1}^n a_k^2b_j^2-2\sum_{k,j=1}^n a_kb_ja_jb_k+\sum_{k,j=1}^n a_j^2b_k^2\\&=\sum_{k,j=1}^n(a_kb_j-a_jb_k)^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

从而

$$\Big(\sum_{k=1}^n a_kb_k\Big)^2\leqslant\Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^n b_k^2\Big).$$

例 3.1.3 设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$, $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$, 求证

$$\Big(\sum_{k=1}^n a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^n b_k\Big)\leqslant n\sum_{k=1}^n a_kb_k.$$

证明 因为

$$n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\Big)=\sum_{k,j=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k,j=1}^{n}a_jb_j,$$

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k\Big)=\sum_{k,j=1}^{n}a_kb_j=\sum_{k,j=1}^{n}a_jb_k,$$

所以

$$\begin{aligned}2\Big[n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k\Big)\Big]&=\sum_{k,j=1}^{n}(a_kb_k-a_kb_j+a_jb_j-a_jb_k)\\&=\sum_{k,j=1}^{n}(a_k-a_j)(b_k-b_j)\geqslant 0,\end{aligned}$$

从而

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k\Big)\leqslant n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k.$$

例 3.1.4 (平均值不等式)

设 $a_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)$, 求证

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

证明 设 $b_k=\dfrac{a_k}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\ (k=1,2,\cdots,n)$, 则 $b_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)$, 且

$$b_1b_2\cdots b_n=1.$$

下面用数学归纳法证明

$$b_1+b_2+\cdots+b_n\geqslant n.$$

当 $n=2$ 时，由 $b_1>0$, $b_2>0$ 及 $b_1b_2=1$ 可得

$$b_1+b_2=b_1+\frac{1}{b_1}=\Big(\sqrt{b_1}-\frac{1}{\sqrt{b_1}}\Big)^2+2\geqslant 2,$$

即结论成立.

假设 $n=k$ 时结论成立，即当 $b_j>0\ (j=1,2,\cdots,k)$, 且 $b_1b_2\cdots b_k=1$ 时，有

$$b_1+b_2+\cdots+b_k\geqslant k.$$

现在假定 $b_1b_2\cdots b_kb_{k+1}=1$. 如果 $b_1=b_2=\cdots=b_{k+1}=1$, 则

$$b_1+b_2+\cdots+b_k+b_{k+1}=k+1;$$

如果 $b_j\ (j=1,2,\cdots,k+1)$ 不全相等，则由 $b_1b_2\cdots b_kb_{k+1}=1$ 可知，至少有两个因子，一个大于 1, 另一个小于 1, 不失一般性可假定

$$b_k<1,\ b_{k+1}>1,$$

并根据归纳假设可得

$$b_1+b_2+\cdots+b_{k-1}+b_kb_{k+1}\geqslant k,$$

于是

$$\begin{aligned}b_1+\cdots+b_k+b_{k+1}&=(b_1+\cdots+b_{k-1}+b_kb_{k+1})+(b_k+b_{k+1}-b_kb_{k+1})\\&\geqslant k+1+(b_k+b_{k+1}-b_kb_{k+1}-1)\\&=k+1+(1-b_k)(b_{k+1}-1)>k+1.\end{aligned}$$

根据数学归纳法原理可得

$$b_1+b_2+\cdots+b_n\geqslant n.$$

再由 $b_k=\dfrac{a_k}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\ (k=1,2,\cdots,n)$ 可得

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

例 3.1.5 设 $a_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)$, 且 r 为任意给定的非零实数. 记

$$M(r)=\left(\frac{a_1^r+a_2^r+\cdots+a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}},$$

称 $M(r)$ 为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 r 次幂平均值. 求证：若 $\alpha<0<\beta$, 则

$$M(\alpha)\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant M(\beta).$$

证明 由平均值不等式可得

$$(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n})^\alpha=\sqrt[n]{a_1^\alpha a_2^\alpha\cdots a_n^\alpha}\leqslant\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n},$$

在上式两端取 $\dfrac{1}{\alpha}$ 次幂，并由 $\dfrac{1}{\alpha}<0$ 可得

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geqslant M(\alpha).$$

同理可证

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant M(\beta).$$

注 由例 3.1.5 可知，n 个正数的调和平均值不大于它们的几何平均值，从而不大于它们的算术平均值，这只要在不等式

$$M(\alpha) \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant M(\beta)$$

中令 $\alpha = -1$, $\beta = 1$ 就够了.

例 3.1.6 设 $a_k > 0$, $b_k > 0$, $c_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$, 求证

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\Big)^3 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^3\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^3\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k^3\Big).$$

(此不等式可视为 Cauchy 不等式的推广.)

证明 令

$$x_k = \frac{a_k}{\sqrt[3]{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^3}},\quad y_k = \frac{b_k}{\sqrt[3]{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^3}},\quad z_k = \frac{c_k}{\sqrt[3]{\sum\limits_{k=1}^{n} c_k^3}}\quad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

则 $x_k > 0$, $y_k > 0$, $z_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$, 且

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = \sum_{k=1}^{n} y_k^3 = \sum_{k=1}^{n} z_k^3 = 1,$$

于是由平均值不等式可知，对每一个 $k\ (k = 1, 2, \cdots, n)$, 有

$$\frac{a_k b_k c_k}{\sqrt[3]{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^3\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^3\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} c_k^3\Big)}} = x_k y_k z_k = \sqrt[3]{x_k^3 y_k^3 z_k^3} \leqslant \frac{x_k^3 + y_k^3 + z_k^3}{3}.$$

将上述不等式两端相加，得

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k c_k}{\sqrt[3]{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^3\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^3\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} c_k^3\Big)}} \leqslant \frac{1}{3}\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^3 + \sum_{k=1}^{n} y_k^3 + \sum_{k=1}^{n} z_k^3\Big) = 1,$$

再将上式两端 3 次方，得

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\Big)^3 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^3\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^3\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k^3\Big).$$

习题 3.1

3.1.1 设 $m, n \in \mathbb{Z}^+$, 且 $m < n$, 求证

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{m}) < \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{m-1}).$$

3.1.2 用数学归纳法证明不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

3.1.3 设 $x_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)$, 求证

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\geqslant n.$$

3.1.4 设 $a_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)$, 求证

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\Big(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\Big)\geqslant n^2.$$

3.1.5 设 $a>0,\ b>0,\ n\in\mathbb{Z}^+$, 求证

$$\sqrt[n+1]{ab^n}\leqslant\frac{a+nb}{n+1}.$$

3.1.6 用数学归纳法证明不等式

$$\Big(\frac{n}{\mathrm{e}}\Big)^n<n!<\mathrm{e}\Big(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\Big)^{n+1}\quad(n\in\mathbb{Z}^+).$$

$\bigg($提示：利用不等式 $\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n<\mathrm{e}<\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{n+1}.\bigg)$

3.1.7 设 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ 为任意一组实数，且 $b_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)$, 求证

$$\min_{1\leqslant k\leqslant n}\Big\{\frac{a_k}{b_k}\Big\}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big\{\frac{a_k}{b_k}\Big\}.$$

3.1.8 设 $x_n=\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n,\ y_n=\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)^n,\ z_n=\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{n+1},\ n\in\mathbb{Z}^+$, 求证:

$$x_n<x_{n+1},\quad y_n<y_{n+1},\quad z_n>z_{n+1}.$$

3.1.9 设 $a_k>0,\ p_k>0\ (k=1,2,\cdots,n),\ r>0$, 求证

$$\Big(\sum_{k=1}^n p_ka_k^r\Big)^2\leqslant\Big(\sum_{k=1}^n p_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^n p_ka_k^{2r}\Big).$$

3.1.10 设 $a_k>0\ (k=1,2,\cdots,n),\ 0<\alpha<\beta$, 求证

$$M(\alpha)<M(\beta).$$

3.2 证明不等式的凸函数方法

为了讲清证明不等式的凸函数方法，我们有必要先简要地介绍一下凸函数的某些性质. 由于我们的目的是为证明不等式做准备，因此这里仅对连续的凸函数进行讨论，而不去考虑更一般的情形.

3.2.1 凸函数的定义及基本性质

定义 3.2.1 设 $\varphi(x)$ 在区间 (a,b) (其中 (a,b) 可以是有穷或无限区间) 上有定义, 如果对 $\forall\, x_1,\ x_2 \in (a,b)$ 及 $\forall\, q_1 > 0,\ q_2 > 0,\ q_1 + q_2 = 1$, 有

$$\varphi(q_1x_1 + q_2x_2) \leqslant q_1\varphi(x_1) + q_2\varphi(x_2),$$

则称 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 上是下凸的, 或称 $\varphi(x)$ 是 (a,b) 上的凸函数. 如果上式中严格不等号成立, 则称 $\varphi(x)$ 是严格凸函数.

从几何意义上看, 若 $\varphi(x)$ 是凸函数, 则曲线 $y=\varphi(x)$ 上任意两点的弧段总是位于连接这两点的直线段之下.

凸函数有以下性质.

定理 3.2.1 $\varphi(x)$ 是区间 (a,b) 上的凸函数的充分必要条件是: 对 (a,b) 内任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$, 皆有

$$\frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)}{x_1-x_2} \leqslant \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_3)}{x_2-x_3}.$$

特别地, $\varphi(x)$ 是严格凸函数的充分必要条件是上式中严格不等号成立.

证明 充分性: 对 $\forall\, x_1,\ x_3 \in (a,b),\ x_1 < x_3$ 及 $\forall\, q_1 > 0,\ q_3 > 0,\ q_1 + q_3 = 1$, 记

$$x_2 = q_1x_1 + q_3x_3,$$

则 $x_1 < x_2 < x_3$, 并由已知条件可得

$$\frac{\varphi(x_1)-\varphi(q_1x_1+q_3x_3)}{x_1-(q_1x_1+q_3x_3)} \leqslant \frac{\varphi(q_1x_1+q_3x_3)-\varphi(x_3)}{q_1x_1+q_3x_3-x_3},$$

于是由

$$x_1-(q_1x_1+q_3x_3) = (1-q_1)x_1 - q_3x_3 = q_3(x_1-x_3),$$
$$q_1x_1+q_3x_3-x_3 = q_1x_1-(1-q_3)x_3 = q_1(x_1-x_3)$$

可得

$$\frac{\varphi(x_1)-\varphi(q_1x_1+q_3x_3)}{q_3} \geqslant \frac{\varphi(q_1x_1+q_3x_3)-\varphi(x_3)}{q_1}.$$

整理得

$$\varphi(q_1x_1+q_3x_3) \leqslant q_1\varphi(x_1) + q_3\varphi(x_3).$$

由定义可知 $\varphi(x)$ 为 (a,b) 上的凸函数, 且如果题设条件中严格不等号成立, 则上面推理中最后不等式中的不等号也是严格的, 即 $\varphi(x)$ 是严格凸函数.

必要性：对 (a,b) 中任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$，令

$$q_1 = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}, \quad q_3 = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1},$$

则 $q_1 > 0$, $q_3 > 0$, $q_1 + q_3 = 1$, 且 $q_1x_1 + q_3x_3 = x_2$, 故由 $\varphi(x)$ 是凸函数可得

$$\varphi(x_2) = \varphi(q_1x_1 + q_3x_3) \leqslant q_1\varphi(x_1) + q_3\varphi(x_3).$$

又由 $q_1 + q_3 = 1$ 及上式可得

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_3) \leqslant q_1\varphi(x_1) + q_3\varphi(x_3) - \varphi(x_3) = q_1[\varphi(x_1) - \varphi(x_3)],$$

$$x_2 - x_3 = q_1x_1 + q_3x_3 - x_3 = q_1(x_1 - x_3),$$

于是由 $x_1 - x_3 < 0$, $x_2 - x_3 < 0$ 可得

$$\frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_3)}{x_1 - x_3} \leqslant \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_3)}{x_2 - x_3}. \tag{*}$$

用类似的方法还可以证明

$$\frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{x_1 - x_2} \leqslant \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_3)}{x_1 - x_3}. \tag{**}$$

比较 (*) 式与 (**) 式就证明了所求证的不等式. 如果 $\varphi(x)$ 是严格凸函数，则从推理过程可知，所求证的不等式也是严格的. ▮

请读者给出本定理及证明过程中的不等式 (*) 与 (**) 的几何解释.

定理 3.2.2 设 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 内可导，则 $\varphi(x)$ 是 (a,b) 上的 (严格) 凸函数的充分必要条件是： $\varphi'(x)$ 在 (a,b) 内 (严格) 单调增加.

证明 必要性：设 $\varphi(x)$ 是凸函数. 对 $\forall\, x_1,\ x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$, 及任意满足关系式 $x_1 < t_1 < t_2 < x_2$ 的 t_1 与 t_2, 由定理 3.2.1 可得

$$\frac{\varphi(x_1) - \varphi(t_1)}{x_1 - t_1} \leqslant \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_2)}{t_1 - t_2} \leqslant \frac{\varphi(t_2) - \varphi(x_2)}{t_2 - x_2}. \tag{*}$$

在上式中，令 $t_1 \to x_1^+$, 并由 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 内可导，得

$$\varphi'(x_1) = \lim_{t_1 \to x_1^+} \frac{\varphi(x_1) - \varphi(t_1)}{x_1 - t_1} \leqslant \frac{\varphi(t_2) - \varphi(x_2)}{t_2 - x_2},$$

再令 $t_2 \to x_2^-$, 得

$$\varphi'(x_1) \leqslant \lim_{t_1 \to x_2^-} \frac{\varphi(t_2) - \varphi(x_2)}{t_2 - x_2} = \varphi'(x_2),$$

即 $\varphi'(x)$ 在 (a,b) 内是单调增加的.

当 $\varphi(x)$ 是严格凸函数时，可再取 t_3，使 $x_1 < t_1 < t_2 < t_3 < x_2$，于是不等式 (*) 中将出现三个严格不等号，此时必有 $\varphi'(x_1) < \varphi'(x_2)$.

充分性：设 $\varphi'(x)$ 在 (a,b) 内单调增加. 对 $\forall\, x_1,\ x_2 \in (a,b)$，$x_1 < x_2$ 及任意满足条件 $q_1 > 0$，$q_2 > 0$，$q_1 + q_2 = 1$ 的 q_1 和 q_2，则 $x_1 < q_1x_1 + q_2x_2 < x_2$，并由微分中值定理可知存在 $\xi_1 \in (x_1, q_1x_1 + q_2x_2)$，使得

$$\varphi(q_1x_1 + q_2x_2) - \varphi(x_1) = \varphi'(\xi_1)(q_1x_1 + q_2x_2 - x_1) = q_2\varphi'(\xi_1)(x_2 - x_1),$$

存在 $\xi_2 \in (q_1x_1 + q_2x_2, x_2)$，使得

$$\varphi(q_1x_1 + q_2x_2) - \varphi(x_2) = \varphi'(\xi_2)(q_1x_1 + q_2x_2 - x_2) = -q_1\varphi'(\xi_2)(x_2 - x_1),$$

于是将上述两个等式分别乘以 q_1，q_2 后相加，并由 $\varphi'(\xi_1) \leqslant \varphi'(\xi_2)$ 可得

$$\varphi(q_1x_1 + q_2x_2) - q_1\varphi(x_1) - q_2\varphi(x_2) = q_1q_2(x_2 - x_1)[\varphi'(\xi_1) - \varphi'(\xi_2)] \leqslant 0,$$

即 $\varphi(x)$ 是 (a,b) 上的凸函数.

如果 $\varphi'(x)$ 严格上升，则从证明过程中可以看出必有

$$\varphi(q_1x_1 + q_2x_2) < q_1\varphi(x_1) + q_2\varphi(x_2).$$

∎

定理 3.2.3 设 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 内可导，则 $\varphi(x)$ 是 (a,b) 上的凸函数的充分必要条件是：对 $\forall\, x_0 \in (a,b)$，恒有

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) \quad (a < x < b).$$

$\varphi(x)$ 是严格凸函数的充分必要条件是上面不等式中 $x \neq x_0$ 时，严格不等号成立.

证明 必要性：设 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 上是凸函数，则由定理 3.2.2 可知，$\varphi'(x)$ 是单调增加的，并由微分中值定理可知，对 $\forall\, x_0 \in (a,b)$，当 $x_0 < x < b$ 时，有

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi_1)(x - x_0) \geqslant \varphi'(x_0)(x - x_0) \quad (x_0 < \xi_1 < x);$$

当 $a < x < x_0$ 时，有

$$\varphi(x_0) - \varphi(x) = \varphi'(\xi_2)(x_0 - x) \leqslant \varphi'(x_0)(x - x_0) \quad (x < \xi_2 < x_0),$$

从而对 $\forall\, x_0 \in (a,b)$，恒有

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) \quad (a < x < b).$$

显然，若 $\varphi(x)$ 是严格凸函数，则上述推导过程中一切不等式都是严格的，特别地，有

$$\varphi(x) > \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) \quad (a < x < b,\ x \neq x_0).$$

充分性：对 $\forall\, x_1,\ x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2$, 由已知条件可得

$$\varphi(x_2) \geqslant \varphi(x_1) + \varphi'(x_1)(x_2 - x_1), \quad \varphi(x_1) \geqslant \varphi(x_2) + \varphi'(x_2)(x_1 - x_2),$$

故有

$$\varphi'(x_1) \leqslant \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \varphi'(x_2),$$

即 $\varphi'(x)$ 在 (a,b) 内是单调增加的，从而 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 上是凸函数.

若将不等式 $\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0)$ 改为严格的，则必有 $\varphi'(x_1) < \varphi'(x_2)$, 即 $\varphi'(x)$ 是严格单调增加的，从而 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 上是严格凸函数. ▌

定理 3.2.3 的几何解释为：对于任意给定的凸函数 $f(x)$, 曲线 $y = f(x)$ 上任意一点处的切线总在该曲线的上方 (切点除外).

定理 3.2.4 设 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 上是凸函数，则它的左导数 $\varphi'_-(x)$ 和右导数 $\varphi'_+(x)$ 都存在，因而 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 内必连续.

证明 对 $\forall\, x_0 \in (a,b)$, 选取 $x^* \in (x_0, b)$, 并作函数

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \quad (a < x < x_0),$$

则由 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 上是凸函数及定理 3.2.1 可知，对 $\forall\, x \in (a, x_0)$, 有

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{\varphi(x_0) - \varphi(x^*)}{x_0 - x^*} = \psi(x^*),$$

于是 $\psi(x)$ 在 (a, x_0) 上是有上界的.

另一方面，对 $\forall\, x_1,\ x_2 \in (a, x_0)$, 当 $x_1 < x_2$ 时，由定理 3.2.1 的 $(*)$ 式可得

$$\psi(x_1) = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_0)}{x_1 - x_0} \leqslant \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_0)}{x_2 - x_0} = \psi(x_2),$$

即 $\psi(x)$ 在 (a, x_0) 上单调增加，于是由单调有界原理可知，$\lim\limits_{x \to x_0^-} \psi(x)$ 存在，即

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'_-(x_0).$$

同理可知，$\varphi'_+(x_0)$ 存在，即

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'_+(x_0).$$

因为 $\varphi'_-(x_0)$ 与 $\varphi'_+(x_0)$ 均存在，所以 $\varphi(x)$ 在点 x_0 是左连续且右连续的，从而是连续的. ▌

定理 3.2.5 设 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 上二次可微，则

(1) 当 $\varphi''(x) \geqslant 0\ (a<x<b)$ 时， $\varphi(x)$ 在 (a,b) 上是凸函数;

(2) 当 $\varphi''(x) > 0\ (a<x<b)$ 时， $\varphi(x)$ 在 (a,b) 上是严格凸函数.

证明 (1) 因为当 $\varphi''(x) \geqslant 0\ (a<x<b)$ 时， $\varphi'(x)$ 在 (a,b) 上是单调增加的，所以由定理 3.2.2 可知， $\varphi(x)$ 在 (a,b) 上是凸函数.

(2) 因为当 $\varphi''(x) > 0\ (a<x<b)$ 时， $\varphi'(x)$ 在 (a,b) 上是严格单调增加的，所以由定理 3.2.2 可知， $\varphi(x)$ 在 (a,b) 上是严格凸函数. ▮

例 3.2.1 设 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 上有定义，求证： $\varphi(x)$ 在 (a,b) 上是凸函数的充分必要条件是对 (a,b) 内满足条件 $x_1<x_2<x_3$ 的任意三点 x_1,x_2,x_3, 恒有

$$D_\varphi(x_1,x_2,x_3)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \varphi(x_1) & \varphi(x_2) & \varphi(x_3) \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

证明 将行列式 $D_\varphi(x_1,x_2,x_3)$ 按第三行展开，得

$$\begin{aligned} D_\varphi(x_1,x_2,x_3) &= \varphi(x_1)(x_3-x_2)+\varphi(x_2)(x_1-x_3)+\varphi(x_3)(x_2-x_1) \\ &= -\varphi(x_1)(x_2-x_3)+\varphi(x_2)(x_1-x_2+x_2-x_3)-\varphi(x_3)(x_1-x_2) \\ &= [\varphi(x_2)-\varphi(x_3)](x_1-x_2)-[\varphi(x_1)-\varphi(x_2)](x_2-x_3). \end{aligned}$$

由此可知， $D_\varphi(x_1,x_2,x_3)\geqslant 0$ 的充分必要条件是

$$\frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)}{x_1-x_2} \leqslant \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_3)}{x_2-x_3},$$

从而由定理 3.2.1 可知，结论成立.

例 3.2.2 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上是单调增加的， $x_0\in(a,b)$, 求证

$$\varphi(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

在 (a,b) 上是凸函数.

证明 对 $\forall\, x_1,\ x_2,\ x_3 \in (a,b)$, 且 $x_1<x_2<x_3$, 由 $f(x)$ 单调增加可得

$$\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(x_2)(x_2-x_1),$$

$$\varphi(x_3)-\varphi(x_2)=\int_{x_2}^{x_3} f(t)\mathrm{d}t \geqslant f(x_2)(x_3-x_2),$$

从而

$$\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant f(x_2) \leqslant \frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_2)}{x_3-x_2}.$$

由上式及定理 3.2.1 可知， $\varphi(x)$ 在 (a,b) 上是凸函数.

3.2.2　证明不等式的凸函数方法

有一类不等式，它们常被称为各种平均值不等式，这些不等式可以借助凸函数的性质直接或间接地加以证明．因此常常称这些不等式为凸性不等式．为叙述方便，下面对本节将要使用的几种平均值记号予以说明．

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为给定的一组正数，记 $a=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，我们依次称

$$
\begin{aligned}
A(a) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \\
G(a) &= (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \\
H(a) &= \frac{1}{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}} = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}, \\
M_r(a) &= \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^r\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{a_1^r+a_2^r+\cdots+a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} \quad (r \neq 0)
\end{aligned}
$$

为数组 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的**算术平均值、几何平均值、调和平均值**和r **次幂平均值**．根据这种记法，易见

$$A(a) = M_1(a), \quad H(a) = M_{-1}(a).$$

为了使各种平均值概念更为一般化，我们定义相应的**加权平均值**．此时仍然假定 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为一组正数， $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 为满足条件

$$\sum_{k=1}^{n} q_k = q_1+q_2+\cdots+q_n = 1$$

的一组正数 (称为**权数**)，记 $q=(q_1, q_2, \cdots, q_n)$．我们将

$$
\begin{aligned}
A(a,q) &= \sum_{k=1}^{n} q_k a_k = q_1 a_1 + q_2 a_2 + \cdots + q_n a_n, \\
G(a,q) &= a_1^{q_1} a_2^{q_2} \cdots a_n^{q_n}, \\
H(a,q) &= \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{q_k}{a_k}} = \frac{1}{\dfrac{q_1}{a_1}+\dfrac{q_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{q_n}{a_n}}, \\
M_r(a,q) &= \left(\sum_{k=1}^{n} q_k a_k^r\right)^{\frac{1}{r}} = \left(q_1 a_1^r + q_2 a_2^r + \cdots + q_n a_n^r\right)^{\frac{1}{r}} \quad (r \neq 0)
\end{aligned}
$$

分别称为**加权算术平均值、加权几何平均值、加权调和平均值**和**加权** r **次幂平均值**．显然，当 $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = \dfrac{1}{n}$ 时，各种加权平均值就相应变为通常平均值．对于加权平均值来说，同样有

$$A(a,q) = M_1(a,q), \quad H(a,q) = M_{-1}(a,q).$$

本节在稍后还将证明

$$G(a,q)=\lim_{r\to 0}M_r(a,q),$$

这样的几何平均值可视为零次幂平均值. 由此可见, 在上述各种平均值中, r 次幂平均值最具有一般性, 本节将在讨论 $M_r(a,q)$ 的基础上, 证明平均值不等式.

我们先从凸函数的 Jensen① 不等式开始.

定理 3.2.6 (Jensen 不等式)

设 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 上是凸函数, 则对 $\forall\, x_1, x_2, \cdots, x_n\in(a,b)$ 及任意一组满足条件 $q_1+q_2+\cdots+q_n=1$ 的正数 $q_1, q_2, \cdots, q_n$, 有不等式

$$\varphi(q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_nx_n)\leqslant q_1\varphi(x_1)+q_2\varphi(x_2)+\cdots+q_n\varphi(x_n).$$

证明 用数学归纳法.

当 $n=2$ 时, 由凸函数的定义可知, 结论成立.

假如当 $n=k$ 时, 有不等式

$$\varphi(q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_kx_k)\leqslant q_1\varphi(x_1)+q_2\varphi(x_2)+\cdots+q_k\varphi(x_k).$$

下面证明: 当 $n=k+1$ 时, 不等式也成立.

事实上, 对 $\forall\, x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}\in(a,b)$ 及任意一组满足条件

$$q_1+q_2+\cdots+q_k+q_{k+1}=1$$

的正数 $q_1, q_2, \cdots, q_k, q_{k+1}$, 令 $q=q_1+q_2+\cdots+q_k$, 则

$$\frac{q_1}{q}+\frac{q_2}{q}+\cdots+\frac{q_k}{q}=1,$$

并由归纳假设可得

$$\varphi\Big(\sum_{j=1}^{k}\frac{q_j}{q}x_j\Big)\leqslant\sum_{j=1}^{k}\frac{q_j}{q}\varphi(x_j)=\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{k}q_j\varphi(x_j),$$

于是由 $q+q_{k+1}=1$, $\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{q_j}{q}x_j\in(a,b)$ 及凸函数的定义可得

$$\begin{aligned}\varphi\Big(\sum_{j=1}^{k+1}q_jx_j\Big)&=\varphi\Big(q\sum_{j=1}^{k}\frac{q_j}{q}x_j+q_{k+1}x_{k+1}\Big)\\&\leqslant q\varphi\Big(\sum_{j=1}^{k}\frac{q_j}{q}x_j\Big)+q_{k+1}\varphi(x_{k+1})\end{aligned}$$

① Jensen, 詹森, 1859—1925, 丹麦.

$$\leqslant q\sum_{j=1}^{k}\frac{q_j}{q}\varphi(x_j)+q_{k+1}\varphi(x_{k+1})=\sum_{j=1}^{k+1}q_j\varphi(x_j).$$

根据数学归纳法原理可知，定理结论成立. ∎

定理 3.2.7 设 $a_k>0$, $q_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)$, $q_1+q_2+\cdots+q_n=1$, 则

$$M_r(a,q)=\Big(\sum_{k=1}^{n}q_ka_k^r\Big)^{\frac{1}{r}}\quad(r\neq 0)$$

在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内都是关于 r 的单调增加函数.

证明 对 $\forall\, r'$, $r''\in(0,+\infty)$, $r'<r''$, 作函数

$$\varphi(x)=x^{\frac{r''}{r'}}\quad(0<x<+\infty),$$

则由

$$\varphi''(x)=\frac{r''(r''-r')}{(r')^2}x^{\frac{r''}{r'}-2}>0\quad(0<x<+\infty)$$

可知，$\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是凸函数，于是对 $\forall\, x_1$, x_2, $\cdots$, $x_n\in(0,+\infty)$ 及任意满足条件 $q_1+q_2+\cdots+q_n=1$ 的正数 q_1, q_2, $\cdots$, q_n, 有

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}q_kx_k\Big)^{\frac{r''}{r'}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}q_k(x_k)^{\frac{r''}{r'}}.$$

取 $x_k=a_k^{r'}\ (k=1,2,\cdots,n)$, 则由 $a_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)$ 及上式可得

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}q_ka_k^{r'}\Big)^{\frac{r''}{r'}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}q_k\big(a_k^{r'}\big)^{\frac{r''}{r'}}=\sum_{k=1}^{n}q_ka_k^{r''},$$

将上面的不等式两边取 $\frac{1}{r''}$ 次幂，并由 $M_r(a,q)$ 的定义可得

$$M_{r'}(a,q)=\Big(\sum_{k=1}^{n}q_ka_k^{r'}\Big)^{\frac{1}{r'}}\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{n}q_ka_k^{r''}\Big)^{\frac{1}{r''}}=M_{r''}(a,q),$$

即 $M_r(a,q)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是关于 r 的单调增加函数.

另一方面，对 $\forall\, r'$, $r''\in(-\infty,0)$, $r'<r''$, 则 $-r'>-r''>0$, 并由前面已证得的结论可得

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}q_kb_k^{-r''}\Big)^{-\frac{1}{r''}}\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{n}q_kb_k^{-r'}\Big)^{-\frac{1}{r'}},$$

将上式两边取倒数，并用 a_k 代替 b_k^{-1} 可得

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}q_ka_k^{r'}\Big)^{\frac{1}{r'}}=\Big(\sum_{k=1}^{n}q_kb_k^{-r'}\Big)^{\frac{1}{r'}}\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{n}q_kb_k^{-r''}\Big)^{\frac{1}{r''}}=\Big(\sum_{k=1}^{n}q_ka_k^{r''}\Big)^{\frac{1}{r''}},$$

从而由 $M_r(a,q)$ 的定义可知，$M_r(a,q)$ 在 $(-\infty,0)$ 内是关于 r 的单调增加函数. ∎

定理 3.2.8 设 $a_k > 0$, $q_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$, $q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$, 则

$$\lim_{r\to 0} M_r(a,q) = G(a,q).$$

证明 对每一个 $k\ (k = 1, 2, \cdots, n)$, 由 e^x 的展开式可得

$$a_k^r = \mathrm{e}^{r\ln a_k} = 1 + r\ln a_k + o(r) \quad (r \to 0),$$

所以由 $G(a,q) = a_1^{q_1} a_2^{q_2} \cdots a_n^{q_n}$ 及 $\ln(1+x)$ 的展开式可得

$$\begin{aligned}\ln\left[\sum_{k=1}^n q_k a_k^r\right] &= \ln\left[\sum_{k=1}^n q_k + r\sum_{k=1}^n q_k \ln a_k + o(r)\right]\\ &= \ln[1 + r\ln G(a,q) + o(r)] = r\ln G(a,q) + o(r) \quad (r \to 0),\end{aligned}$$

于是由 $M_r(a,q)$ 的定义可得

$$\lim_{r\to 0}[\ln M_r(a,q)] = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\ln\left(\sum_{k=1}^n q_k a_k^r\right) = \lim_{r\to 0}[\ln G(a,q) + o(1)] = \ln G(a,q),$$

即

$$\lim_{r\to 0} M_r(a,q) = G(a,q).$$

∎

根据定理 3.2.8, 我们可以定义 $M_r(a,q)$ 在 $r = 0$ 处的值为 $G(a,q)$, 即

$$M_0(a,q) = G(a,q),$$

于是 $M_r(a,q)$ 可以看作 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数，并且是单调增加的.

推论 3.2.9 设 $a_k > 0$, $q_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$, $q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$, 则

$$H(a,q) \leqslant G(a,q) \leqslant A(a,q).$$

推论 3.2.9 的证明可从 $M_r(a,q)$ 的单调性直接得到，其含义是 n 个正数的几何平均值 (加权) 不小于它们的调和平均值 (加权), 不大于它们的算术平均值 (加权). 特别地，当 $q_k = \dfrac{1}{n}\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ 时，有 $H(a) \leqslant G(a) \leqslant A(a)$, 即

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

定理 3.2.10 设 $a_k > 0$, $q_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$, $q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{r\to +\infty} M_r(a,q) &= \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\},\\ \lim_{r\to -\infty} M_r(a,q) &= \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.\end{aligned}$$

证明 不失一般性，不妨设 $a_1 = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}$, 则对 $\forall\, r \in (0, +\infty)$, 有

$$a_1 q_1^{\frac{1}{r}} = (q_1 a_1^r)^{\frac{1}{r}} < \left(\sum_{k=1}^n q_k a_k^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant a_1 \left(\sum_{i=1}^n q_k\right)^{\frac{1}{r}} = a_1,$$

即

$$a_1 q_1^{\frac{1}{r}} < M_r(a, q) \leqslant a_1,$$

于是由 $\lim\limits_{r\to+\infty} q_1^{\frac{1}{r}} = 1$, 并根据两边夹原理可得

$$\lim_{r\to+\infty} M_r(a, q) = a_1 = \max_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}.$$

另一方面，对 $\forall\, r \in (0, +\infty)$, 有

$$M_{-r}(a, q) = \left(\sum_{k=1}^n q_k a_k^{-r}\right)^{-\frac{1}{r}} = \frac{1}{\left[\sum\limits_{k=1}^n q_k (a_k^{-1})^r\right]^{\frac{1}{r}}} = \frac{1}{M_r(a^{-1}, q)},$$

于是由

$$\lim_{r\to+\infty} M_{-r}(a, q) = \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{M_r(a^{-1}, q)} = \frac{1}{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k^{-1}\}} = \min_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}$$

可得

$$\lim_{r\to-\infty} M_r(a, q) = \lim_{r\to+\infty} M_{-r}(a, q) = \min_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}.$$ ▌

至此，根据定理 3.2.8 、推论 3.2.9 及定理 3.2.10, 我们对 n 个正数的 r 次幂平均值 $M_r(a, q)$ 已有了比较完整的了解，它在 $(-\infty, +\infty)$ 上关于 r 严格单调增加，并且以 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}$ 为上界，以 $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}$ 为下界. 这两个常数记为

$$M_{+\infty}(a, q) = \max_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}, \quad M_{-\infty}(a, q) = \min_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}.$$

纵观前面的证明，我们得到下面一串不等式:

$$M_{-\infty}(a, q) \leqslant H(a, q) \leqslant G(a, q) \leqslant A(a, q) \leqslant M_{+\infty}(a, q).$$

定理 3.2.11 设 $a_{ik} > 0$, $q_k > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n;\ k = 1, 2, \cdots, m)$, $\sum\limits_{k=1}^m q_k = 1$, 则

$$\sum_{i=1}^n a_{i1}^{q_1} a_{i2}^{q_2} \cdots a_{im}^{q_m} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_{i1}\right)^{q_1} \left(\sum_{i=1}^n a_{i2}\right)^{q_2} \cdots \left(\sum_{i=1}^n a_{im}\right)^{q_m}.$$

证明 令 $b_k=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ik}\ (k=1,2,\cdots,m)$, 则对每一个 $i\ (i=1,2,\cdots,n)$, 有

$$\frac{a_{ik}}{b_k}>0,\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{a_{ik}}{b_k}=1\quad (k=1,2,\cdots,m),$$

于是由条件 $q_k>0\ (k=1,2,\cdots,m)$, $\sum\limits_{k=1}^{m}q_k=1$ 及推论 3.2.9 可得

$$\left(\frac{a_{i1}}{b_1}\right)^{q_1}\left(\frac{a_{i2}}{b_2}\right)^{q_2}\cdots\left(\frac{a_{im}}{b_m}\right)^{q_m}\leqslant q_1\frac{a_{i1}}{b_1}+q_2\frac{a_{i2}}{b_2}+\cdots+q_m\frac{a_{im}}{b_m}.$$

将上式两端对 i 从 1 到 n 求和, 得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i1}^{q_1}a_{i2}^{q_2}\cdots a_{im}^{q_m}}{b_1^{q_1}b_2^{q_2}\cdots b_m^{q_m}}&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{i1}}{b_1}\right)^{q_1}\left(\frac{a_{i2}}{b_2}\right)^{q_2}\cdots\left(\frac{a_{im}}{b_m}\right)^{q_m}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(q_1\frac{a_{i1}}{b_1}+q_2\frac{a_{i2}}{b_2}+\cdots+q_m\frac{a_{im}}{b_m}\right)\\&=q_1\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i1}}{b_1}+q_2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i2}}{b_2}+\cdots+q_m\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{im}}{b_m}=\sum_{k=1}^{m}q_k=1,\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}a_{i1}^{q_i}a_{i2}^{q_2}\cdots a_{im}^{q_m}\leqslant b_1^{q_1}b_2^{q_2}\cdots b_m^{q_m}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i1}\right)^{q_1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i2}\right)^{q_2}\cdots\left(\sum_{i=1}^{n}a_{im}\right)^{q_m}.\ ▮$$

推论 3.2.12 (Hölder① 不等式)

设 $a_i>0,\ b_i>0\ (i=1,2,\cdots,n),\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

证明 令 $q_1=\dfrac{1}{\alpha},\ q_2=\dfrac{1}{\beta},\ a_{i1}=a_i^{\alpha},\ a_{i2}=b_i^{\beta}\ (i=1,2,\cdots,n)$, 则

$$a_i=(a_{i1})^{\frac{1}{\alpha}}=a_{i1}^{q_1},\quad b_i=(a_{i2})^{\frac{1}{\beta}}=a_{i2}^{q_2}\quad (i=1,2,\cdots,n),$$

于是由定理 3.2.11 可得

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}^{q_1}a_{i2}^{q_2}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i1}\right)^{q_1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i2}\right)^{q_2}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}.\ ▮$$

注 在 Hölder 不等式中, 若令 $\alpha=\beta=2$, 则可得到 Cauchy 不等式

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

---

① Hölder, 赫尔德, 1859—1937, 德国.

定理 3.2.13 (Minkowski[①] 不等式)

设 $a_k>0,\ b_k>0\ (k=1,2,\cdots,n),\ r>1$, 则

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r\right]^{\frac{1}{r}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

或

$$M_r(a+b)\leqslant M_r(a)+M_r(b),$$

其中记 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\ b=(b_1,b_2,\cdots,b_n),\ a+b=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$.

证明 记 $c_k=a_k+b_k\ (k=1,2,\cdots,n),\ r_1=\dfrac{r}{r-1}$, 则由 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r&=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)c_k^{r-1}=\sum_{k=1}^{n}a_kc_k^{r-1}+\sum_{k=1}^{n}b_kc_k^{r-1}\\&\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^r\right)^{\frac{1}{r}}\left[\sum_{k=1}^{n}c_k^{(r-1)r_1}\right]^{\frac{1}{r_1}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^r\right)^{\frac{1}{r}}\left[\sum_{k=1}^{n}c_k^{(r-1)r_1}\right]^{\frac{1}{r_1}}\\&=\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^r\right)^{\frac{1}{r}}\right]\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r\right]^{\frac{r-1}{r}}.\end{aligned}$$

用 $\left[\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r\right]^{\frac{r-1}{r}}$ 除此不等式的两端, 并由 $1-\dfrac{r-1}{r}=\dfrac{1}{r}$ 可得

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r\right]^{\frac{1}{r}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

∎

定理 3.2.14 (Jensen 不等式)

设 $\varphi(x)$ 在 $[A,B]$ 上是凸函数, $f(x)$ 与 $q(x)$ 均于 $[a,b]$ 上可积, 且对 $\forall\, x\in[a,b]$, 有 $A\leqslant f(x)\leqslant B,\ q(x)\geqslant 0,\ \displaystyle\int_a^b q(x)\mathrm{d}x=1$, 则

$$\varphi\left(\int_a^b q(x)f(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant\int_a^b q(x)\varphi(f(x))\mathrm{d}x.$$

证明 令 $y_0=\displaystyle\int_a^b q(x)f(x)\mathrm{d}x$, 则由已知条件易知, $y_0\in[A,B]$, 并由 $\varphi(x)$ 在 $[A,B]$ 上是凸函数及习题 3.2.9 的结论可知, 存在常数 m, 使得对 $\forall\, y\in[A,B]$, 有

$$\varphi(y)\geqslant\varphi(y_0)+m(y-y_0),$$

于是对 $\forall\, x\in[a,b]$, 由 $A\leqslant f(x)\leqslant B$ 可得

$$\varphi(f(x))\geqslant\varphi(y_0)+m[f(x)-y_0].$$

① Minkowski, 闵可夫斯基, 1864—1909, 德国.

用 $q(x)$ 乘此不等式的两端，并对 x 从 a 到 b 积分，得

$$\int_a^b q(x)\varphi(f(x))\mathrm{d}x \geqslant \varphi(y_0) + m\left[\int_a^b q(x)f(x)\mathrm{d}x - y_0\right] = \varphi(y_0),$$

即

$$\varphi\left(\int_a^b q(x)f(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_a^b q(x)\varphi(f(x))\mathrm{d}x.$$

▌

定理 3.2.14 中的不等式正是定理 3.2.6 中 Jensen 不等式的积分形式.

例 3.2.3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸函数，求证

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

证明 对 $\forall\, t \in (0,1)$, 由 $f(x)$ 是凸函数可得

$$f(ta+(1-t)b) \leqslant tf(a)+(1-t)f(b),$$

从而

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\mathrm{d}t \leqslant f(a)\int_0^1 t\mathrm{d}t + f(b)\int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t,$$

即

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

另一方面，记 $c = \dfrac{a+b}{2}$, 并由 $f(x)$ 是凸函数可知，当 $0 < t < \dfrac{b-a}{2}$ 时，有

$$f(c) = f\left(\frac{(c-t)+(c+t)}{2}\right) \leqslant \frac{f(c-t)+f(c+t)}{2}.$$

将上式两端对 t 从 0 到 $\dfrac{b-a}{2}$ 积分，得

$$f(c)\,\frac{b-a}{2} \leqslant \frac{1}{2}\left[\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例 3.2.4 设 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 上连续，且对 $\forall\, x_1$, $x_2 \in (a,b)$, 皆有不等式

$$\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2},$$

求证：对任意的 $x_k \in (a,b)$，$q_k > 0\ (k=1,2,\cdots,n)$，$\sum\limits_{k=1}^{n} q_k = 1$，有

$$\varphi\Big(\sum_{k=1}^{n} q_k x_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} q_k \varphi(x_k). \tag{$*$}$$

证明 我们分以下三步证明.

(1) 用数学归纳法证明：当 $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = \dfrac{1}{n}$ 时，有

$$\varphi\Big(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\Big) \leqslant \frac{\varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_n)}{n}. \tag{$**$}$$

事实上，当 $n=2$ 时，由已知条件可知，对 $\forall\, x_1,\ x_2 \in (a,b)$，有

$$\varphi\Big(\frac{x_1+x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2}.$$

假设当 $n=2^k$ 时，$(**)$ 式成立，下面证明当 $n=2^{k+1}$ 时，$(**)$ 式也成立.

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a,b)$，记 $m=2^k$，则 $n=2m$，并由归纳假设可得

$$\begin{aligned}
\varphi\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\Big) &= \varphi\Big(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m+x_{m+1}+\cdots+x_n}{2m}\Big)\\
&= \varphi\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}+\frac{x_{m+1}+\cdots+x_n}{m}\Big)\Big]\\
&\leqslant \frac{1}{2}\Big[\varphi\Big(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}\Big)+\varphi\Big(\frac{x_{m+1}+\cdots+x_n}{m}\Big)\Big]\\
&\leqslant \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\cdots+\varphi(x_m)+\varphi(x_{m+1})+\cdots+\varphi(x_n)}{2m}\\
&= \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\cdots+\varphi(x_n)}{n}.
\end{aligned}$$

前面我们已证明了 $(**)$ 式对所有形如 2^k 的自然数是成立的. 为了完成数学归纳法证明，还需要证明如果 $(**)$ 式对某自然数 $n>2$ 成立，则它对 $n-1$ 也成立.

事实上，对任意的 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1} \in (a,b)$，其中 n 为形如 2^k 的正整数. 若令 $x^* = \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$，则

$$\begin{aligned}
\varphi(x^*) &= \varphi\Big(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\Big) = \varphi\Big(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x^*}{n}\Big)\\
&\leqslant \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\cdots+\varphi(x_{n-1})+\varphi(x^*)}{n}\\
&= \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\cdots+\varphi(x_{n-1})}{n} + \frac{1}{n}\varphi\Big(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\Big),
\end{aligned}$$

即

$$\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\varphi\Big(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\Big) \leqslant \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\cdots+\varphi(x_{n-1})}{n},$$

从而

$$\varphi\Big(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\Big) \leqslant \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\cdots+\varphi(x_{n-1})}{n-1}.$$

至此我们用数学归纳法证明了 $(**)$ 式对一切自然数 n 均成立.

(2) 证明：当 q_k 为有理数时，$(*)$ 式成立.

设 q_k 为有理数，且 $q_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)$, $q_1+q_2+\cdots+q_n=1$, 则存在正整数 q, $p_k\ (k=1,2,\cdots,n)$, 使得 $q_k=\dfrac{p_k}{q}\ (k=1,2,\cdots,n)$, $p_1+p_2+\cdots+p_n=q$, 于是由 (1) 可知，对 $\forall\, x_1,\ x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$, 有

$$\begin{aligned}\varphi\Big(\sum_{k=1}^{n}q_kx_k\Big)&=\varphi\Big(\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{q}\Big)\\&=\varphi\Big(\frac{\overbrace{x_1+\cdots+x_1}^{p_1}+\overbrace{x_2+\cdots+x_2}^{p_2}+\cdots+\overbrace{x_n+\cdots+x_n}^{p_n}}{q}\Big)\\&\leqslant\frac{p_1\varphi(x_1)+p_2\varphi(x_2)+\cdots+p_n\varphi(x_n)}{q}=\sum_{k=1}^{n}q_k\varphi(x_k).\end{aligned}$$

(3) 证明：当 q_k 为无理数时，$(*)$ 式成立.

设 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 为 n 个正实数，且 $q_1+q_1+\cdots+q_n=1$, 此时存在 $n-1$ 个正有理数列 $\{r_m^{(1)}\}$, $\{r_m^{(2)}\},\cdots,\{r_m^{(n-1)}\}$, 使得 $\lim\limits_{m\to\infty}r_m^{(k)}=q_k\ (k=1,2,\cdots,n-1)$, 且

$$r_m^{(1)}+r_m^{(2)}+\cdots+r_m^{(n-1)}<1\quad(m\in\mathbb{Z}^+).$$

对每一个 $m\in\mathbb{Z}^+$, 令 $r_m^{(n)}=1-\sum\limits_{k=1}^{n-1}r_m^{(k)}$, 则 $\{r_m^{(n)}\}$ 是正有理数列，且

$$\lim_{m\to\infty}r_m^{(n)}=1-\sum_{k=1}^{n-1}q_k=q_n,$$

并由 (2) 中已证明的结论可得

$$\varphi\Big(\sum_{k=1}^{n}r_m^{(k)}x_k\Big)\leqslant\sum_{k=1}^{n}r_m^{(k)}\varphi(x_k),$$

于是令 $m\to\infty$, 并由 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 上连续可得

$$\varphi\Big(\sum_{k=1}^{n}q_kx_k\Big)\leqslant\sum_{k=1}^{n}q_k\varphi(x_k).$$

例 3.2.5 (Ляпунов[①]不等式)

设 $a_k>0$, $q_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)$, $\sum\limits_{k=1}^{n}q_k=1$, $0<r<s<t$, 求证:

$$M_s^s(a,q)\leqslant\Big[M_r^r(a,q)\Big]^{\frac{t-s}{t-r}}\Big[M_t^t(a,q)\Big]^{\frac{s-r}{t-r}},$$

① Ляпунов, 李雅普诺夫， 1857—1918, 俄国.

其中 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$, $M_s(a,q)=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}q_ka_k^s\right)^{\frac{1}{s}}$.

证明 设 $0<r<t$, $\sigma=\dfrac{1}{2}(r+t)$, 则由 Cauchy 不等式可得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}q_ka_k^{\sigma}\right)^2=\left[\sum_{k=1}^{n}(q_ka_k^r)^{\frac{1}{2}}(q_ka_k^t)^{\frac{1}{2}}\right]^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}q_ka_k^r\right)\left(\sum_{k=1}^{n}q_ka_k^t\right),$$

即

$$[M_\sigma^\sigma(a,q)]^2\leqslant M_r^r(a,q)\cdot M_t^t(a,q),$$

再将上式两端取对数，得

$$\ln M_\sigma^\sigma(a,q)\leqslant\frac{\ln M_r^r(a,q)+\ln M_t^t(a,q)}{2}.$$

令 $\varphi(s)=\ln M_s^s(a,q)$ $(s>0)$, 则由上式可得

$$\varphi\left(\frac{r+t}{2}\right)\leqslant\frac{\varphi(r)+\varphi(t)}{2},$$

于是由例 3.2.4 可知， $\varphi(s)$ 为凸函数.

记 $q_1=\dfrac{t-s}{t-r}$, $q_2=\dfrac{s-r}{t-r}$ $(0<r<s<t)$, 则 $q_1>0$, $q_2>0$, $q_1+q_2=1$, 于是

$$\varphi(s)=\varphi\left(\frac{t-s}{t-r}r+\frac{s-r}{t-r}t\right)\leqslant\frac{t-s}{t-r}\varphi(r)+\frac{s-r}{t-r}\varphi(t),$$

即

$$\ln M_s^s(a,q)\leqslant\frac{t-s}{t-r}\ln M_r^r(a,q)+\frac{s-r}{t-r}\ln M_t^t(a,q).$$

由此可知，当 $0<r<s<t$ 时，有

$$M_s^s(a,q)\leqslant\Big[M_r^r(a,q)\Big]^{\frac{t-s}{t-r}}\Big[M_t^t(a,q)\Big]^{\frac{s-r}{t-r}}.$$

习题 3.2

3.2.1 证明：若 $\varphi(x)$ 为凸函数， $f(x)$ 为单调增加的凸函数，则 $f(\varphi(x))$ 亦为凸函数.

3.2.2 设 $\varphi(x)$ 是凸函数， $a<b<c$, 且 $\varphi(a)=\varphi(b)=\varphi(c)$, 求证 $\varphi(x)$ 在 (a,c) 内恒为常数.

3.2.3 设 $f(x)$ 为二次可微的正值函数，求证 $\ln f(x)$ 为凸函数的充分必要条件是

$$f(x)f''(x)-[f'(x)]^2\geqslant 0.$$

3.2.4 设 $\varphi(x)$ 为二次可微的正值凸函数，求证： $f(x)=x^{\frac{a+1}{2}}\varphi(x^{-a})$ $(a\geqslant 1)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为凸函数， $g(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\varphi(\mathrm{e}^{-x})$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为凸函数.

3.2.5 证明：若 $\varphi(x)$ 当 $x>0$ 时有定义，则 $x\varphi(x)$ 为凸函数的充分必要条件是 $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ 为凸函数.

3.2.6 设 a, b, x, y 均为正数，并且满足 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, 求证

$$x\ln\frac{x}{a}+y\ln\frac{y}{b}>(x+y)\ln\frac{x+y}{a+b}.$$

3.2.7 设 $f(x)>0$, 且 $-f(x)$ 为凸函数，求证 $\frac{1}{f(x)}$ 也是凸函数.

3.2.8 证明：若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 (a,b) 上的凸函数，则 $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ 也是 (a,b) 上的凸函数.

3.2.9 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凸函数，求证：对 $\forall\, x_0\in(a,b)$, 存在 $m\in[f'_-(x_0),f'_+(x_0)]$, 使得对 $\forall\, x\in(a,b)$, 有

$$f(x)\geqslant f(x_0)+m(x-x_0).$$

3.2.10 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上有定义，并对 $\forall\, x_0\in(a,b)$, 存在常数 m, 使得对 $\forall\, x\in(a,b)$, 有

$$f(x)\geqslant f(x_0)+m(x-x_0),$$

求证 $f(x)$ 为凸函数.

3.2.11 研究函数 $\varphi(x)=-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上的凸性，并由此根据定理 3.2.6 导出不等式

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

其中 $a_k>0(k=1,2,\cdots,n)$.

3.2.12 研究函数 $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的凸性，并由此根据定理 3.2.6 导出不等式

$$\frac{n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right),$$

其中 $x_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)$.

3.2.13 设 $a_k>0$, $q_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)$, 且 $\sum\limits_{k=1}^{n}q_k=1$, 求证

$$1+a_1^{q_1}a_2^{q_2}\cdots a_n^{q_n}\leqslant(1+a_1)^{q_1}(1+a_2)^{q_2}\cdots(1+a_n)^{q_n}.$$

3.2.14 设 $f(x)\in R[a,b]$, 求证：

(1) $\mathrm{e}^{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}\leqslant\int_0^1\mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x$;

(2) 若 $f(x)\geqslant\alpha>0$, 则 $\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x\leqslant\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

3.2.15 设 $f(x)\in C[a,b]$, 求证 $f(x)$ 是凸函数的充分必要条件是不等式

$$f(x)\leqslant\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(x+t)\mathrm{d}t$$

在任何区间 $[x-h,x+h]$ 上成立，其中 $h>0$，且 $[x-h,x+h]\subset[a,b]$.

3.2.16　设 $f(x)\geqslant 0$，$f''(x)\leqslant 0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，求证

$$f(x)\leqslant\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

3.2.17　设 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 上是凸函数，$x_k\in(a,b)$，$p_k>0$ $(k=1,2,\cdots,n)$，求证

$$\varphi\left[\frac{\sum\limits_{k=1}^n p_kx_k}{\sum\limits_{k=1}^n p_k}\right]\leqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^n p_k\varphi(x_k)}{\sum\limits_{k=1}^n p_k}.$$

(说明：这是定理 3.2.6 的推广，它取消了 $\sum\limits_{k=1}^n p_k=1$ 这一限制.)

3.2.18　设 $\varphi(x)$ 在 $[A,B]$ 上是凸函数，$f(x)\in R[a,b]$，且 $A\leqslant f(x)\leqslant B$，$p(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负可积，且 $\displaystyle\int_a^b p(x)\mathrm{d}x>0$，求证

$$\varphi\left[\frac{\displaystyle\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right]\leqslant\frac{\displaystyle\int_a^b p(x)\varphi(f(x))\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}.$$

(提示：利用定积分的定义.)

3.2.19　设 $f(x)$，$q(x)\in R[a,b]$，且 $q(x)\geqslant 0$，$f(x)>0$，$\displaystyle\int_a^b q(x)\mathrm{d}x=1$. 记

$$M_r(f,q)=\left(\int_a^b q(x)[f(x)]^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}\quad(r\neq 0),$$

求证 $M_r(f,q)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上均为单调增加函数.

3.2.20　设 $M_r(f,q)$ 的意义与习题 3.2.19 中相同，$G(f,q)=\mathrm{e}^{\int_a^b q(x)\ln f(x)\mathrm{d}x}$，求证：

$$\lim_{r\to 0}M_r(f,q)=G(f,q);$$

$$\lim_{r\to+\infty}M_r(f,q)=\max_{[a,b]}\{f(x)\};$$

$$\lim_{r\to-\infty}M_r(f,q)=\min_{[a,b]}\{f(x)\}.$$

3.2.21　设 $f(x)$ 不等于常数，$f(x)$，$q(x)\in R[a,b]$，且 $f(x)>0$，$q(x)>0$，$\displaystyle\int_a^b q(x)\mathrm{d}x=1$，求证

$$\frac{1}{\displaystyle\int_a^b\frac{q(x)}{f(x)}\mathrm{d}x}<\mathrm{e}^{\int_a^b q(x)\ln f(x)\mathrm{d}x}<\int_a^b q(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

3.2.22　(Hölder 不等式) 设 $f(x)$，$g(x)\in R(a,b]$，$\alpha>0$，$\beta>0$，$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$，求证

$$\int_a^b|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_a^b|f(x)|^\alpha\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\int_a^b|g(x)|^\beta\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

3.2.23 (Minkowski 不等式) 设 $f(x),\ g(x)\in R[a,b],\ r>1$, 求证

$$\left(\int_a^b|f(x)+g(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant\left(\int_a^b|f(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\int_a^b|g(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}.$$

3.3 利用微分学证明不等式

函数的单调性与极值问题都与不等式密切联系, 而微分学中值定理和 Taylor① 公式又使我们能够通过对导数或余项的估计来确定变量间的大小关系, 因此, 它们常常是证明不等式的得力工具. 本节所讨论的就是如何利用微分学证明不等式, 其主要依据有以下定理或命题.

定理 3.3.1 设 $f(x)\in C[a,b]$, 且在 (a,b) 内可导, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

定理 3.3.2 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $g'(x)\neq 0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

定理 3.3.3 设 $f(x)\in C^{n+1}(a,b)$, 则对 $\forall\, x,\ x_0\in(a,b)$, 有

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 介于 x 与 x_0 之间.

命题 3.3.1 设 $f(x)\in C[a,b]$, 且在 (a,b) 内可导, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加 (或减少) 的充分必要条件是 $f'(x)\geqslant 0$ (或 $f'(x)\leqslant 0$).

命题 3.3.2 设 $f(x)\in C^1[a,b]$, 且在 (a,b) 内有唯一极值点 x_0, 则当 x_0 是极大值 (极小值) 点时, $f(x_0)$ 就是最大值 (最小值), 且 $f(x)$ 的最大值 (最小值) 一定在区间端点达到.

命题 3.3.3 设 $f(x)\in C^1(a,b)$ (其中 $a,\ b$ 可以是 $-\infty,\ +\infty$), 且在 (a,b) 内有唯一极值点 x_0, 则当 x_0 是极大 (小) 值点时, $f(x_0)$ 就是最大 (小) 值.

例 3.3.1 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可微, $f(a)=g(a),\ f(b)=g(b)$, 且对 $\forall\, x\in(a,b)$, 有 $f''(x)<g''(x)$, 求证: 对 $\forall\, x\in(a,b)$, 有 $f(x)>g(x)$.

证明 令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)\ (a\leqslant x\leqslant b)$, 则由 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$, 并根据 Rolle 定理可知, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\varphi'(\xi)=0$.

---

① Taylor, 泰勒, 1685—1731, 英国.

又由 $\varphi''(x)=f''(x)-g''(x)<0\ (a<x<b)$ 可知, ξ 是函数 $\varphi(x)$ 在 (a,b) 内的唯一极大值点, 所以 $\varphi(x)$ 的最小值只能在区间 $[a,b]$ 的端点达到, 即当 $x\in(a,b)$ 时, 有 $\varphi(x)>\varphi(a)=\varphi(b)=0$, 从而对 $\forall\, x\in(a,b)$, 有 $f(x)>g(x)$.

例 3.3.2 求证: 对任意正整数 n, 有

$$\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

分析 为了用微分学, 将离散变量 n 转换为连续变量 x, 我们只需证明: 对任意的 $x>0$, 有

$$\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{2x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,$$

这相当于不等式

$$\ln\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<1<\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

证明 令 $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{2x+1}\right)+x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-1\ (x\in(0,+\infty))$, 则由

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{(2x+1)^2}\right]=0$$

及

$$f''(x)=-\frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2}<0\quad(0<x<+\infty)$$

可知, 当 $x\to+\infty$ 时, $f'(x)$ 单调减少趋于零, 故当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, 从而由

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]=0$$

可知, 当 $x\to+\infty$ 时, $f(x)$ 单调增加趋于零. 这说明当 $x>0$ 时, $f(x)<0$, 从而对任意正整数 n, 有

$$f(n)=\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)+n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1<0,$$

即

$$\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}.$$

同理可知, 对任意正整数 n, 有

$$\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

例 3.3.3 设 $f(x)\in C^2[a,b]$, 且 $f(a)=f(b)=0$, 求证

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f(x)|\}\leqslant\frac{(b-a)^2}{8}\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f''(x)|\}.$$

证明 如果 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f(x)|\}=0$, 则 $f(x)\equiv 0$, 此时结论自然成立.

如果 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f(x)|\}\neq 0$, 则由 $f(x)\in C^2[a,b]$ 及 $f(a)=f(b)=0$ 可知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$|f(\xi)|=\max_{[a,b]}\{|f(x)|\}>0,$$

并且 $f'(\xi)=0$, 于是由 Taylor 公式可知，对 $\forall\, x\in[a,b]$, 有

$$f(x)=f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi)+\frac{f''(\eta)}{2}(x-\xi)^2=f(\xi)+\frac{f''(\eta)}{2}(x-\xi)^2,$$

其中 η 介于 x 与 ξ 之间. 由此可知，当 $\xi\in\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$ 时，由

$$0=f(a)=f(\xi)+\frac{f''(\eta)}{2}(a-\xi)^2$$

可得

$$|f(\xi)|=\frac{|f''(\eta)|}{2}(\xi-a)^2\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2|f''(\eta)|=\frac{(b-a)^2}{8}\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f''(x)|\};$$

当 $\xi\in\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$ 时，由

$$0=f(b)=f(\xi)+\frac{f''(\eta)}{2}(b-\xi)^2$$

可得

$$|f(\xi)|=\frac{|f''(\eta)|}{2}(b-\xi)^2\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2|f''(\eta)|=\frac{(b-a)^2}{8}\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f''(x)|\},$$

从而

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f(x)|\}=|f(\xi)|\leqslant\frac{(b-a)^2}{8}\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f''(x)|\}.$$

例 3.3.4 证明不等式

$$\frac{x(1-x)}{\sin\pi x}<\frac{1}{\pi}\quad(0<x<1).$$

证明 设 $f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{\pi}-x(1-x)\ (0<x<1)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 具有三阶连续的导数，且

$$f'(x)=\cos\pi x+2x-1,\quad f''(x)=2-\pi\sin\pi x,\quad f'''(x)=-\pi^2\cos\pi x.$$

由于 $f'''(x)$ 在 $[0,1]$ 上有唯一的零点 $x=\dfrac{1}{2}$, 并根据 Rolle 定理可知, $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 上至多有两个零点, 而 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上只能有三个零点, 分别为 $x=0$, $x=\dfrac{1}{2}$, $x=1$. 又由

$$f''\left(\frac{1}{2}\right)=2-\pi<0$$

可知, $x=\dfrac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 中的唯一的极大值点. 这说明 $f(x)$ 的最小值点只能在端点 $x=0$ 或 $x=1$ 处达到, 即 $f(x)>f(0)=f(1)=0\ (0<x<1)$, 从而

$$\frac{x(1-x)}{\sin\pi x}<\frac{1}{\pi}\quad(0<x<1).$$

例 3.3.5 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二次可微, 并且

$$M_k=\sup\{|f^{(k)}(x)|\}<+\infty\quad(k=0,1,2),$$

求证 $M_1^2\leqslant 2M_0M_2$.

证明 对 $\forall\, x\in(-\infty,+\infty)$ 及 $\forall\, h>0$, 由 Taylor 公式可得

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi_1)}{2}h^2\quad(x<\xi_1<x+h),$$
$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\xi_2)}{2}h^2\quad(x-h<\xi_2<x).$$

两式相减得

$$f'(x)=\frac{1}{2h}[f(x+h)-f(x-h)]+\frac{h}{4}[f''(\xi_2)-f''(\xi_1)],$$

从而对 $\forall\, x\in(-\infty,+\infty)$ 及 $\forall\, h>0$, 有

$$|f'(x)|\leqslant\frac{M_0}{h}+\frac{h}{2}M_2. \tag{$*$}$$

如果 $M_0=0$, 结论显然成立. 如果 $M_0>0$, 令 $\varphi(h)=\dfrac{M_0}{h}+\dfrac{h}{2}M_2(h>0)$, 则由

$$\varphi'(h)=-\frac{M_0}{h^2}+\frac{M_2}{2},\quad\varphi''(h)=\frac{2M_0}{h^3}>0$$

可知, $\varphi(h)$ 在点 $h=\sqrt{\dfrac{2M_0}{M_2}}$ 处取得最小值, 故对 $\forall\, x\in(-\infty,+\infty)$, 由 $(*)$ 式可得

$$|f'(x)|\leqslant\varphi\left(\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}\right)=M_0\sqrt{\frac{M_2}{2M_0}}+\frac{M_2}{2}\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}=\sqrt{2M_0M_2}.$$

再根据 x 的任意性, 就得到

$$M_1^2=[\sup\{|f'(x)|\}]^2\leqslant\left[\sqrt{2M_0M_2}\right]^2=2M_0M_2.$$

例 3.3.6 设 t, a, b, p, q 均为正数，且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 求证

$$ab \leqslant \frac{1}{p}(ta)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{b}{t}\right)^q.$$

证明 令 $f(t)=\dfrac{a^p}{p}t^p+\dfrac{b^q}{q}t^{-q}\ (t>0)$, 则由

$$f'(t)=a^pt^{p-1}-b^qt^{-q-1},\quad f''(t)=(p-1)a^pt^{p-2}+(q+1)b^qt^{-q-2}$$

可知，$f'(t)$ 只有唯一的零点 $t_0=\left(\dfrac{b^q}{a^p}\right)^{\frac{1}{p+q}}=\left(\dfrac{b^q}{a^p}\right)^{\frac{1}{pq}}=b^{\frac{1}{p}}a^{-\frac{1}{q}}$, 且

$$f''(t_0)=(p-1)b^{\frac{p-2}{p}}a^{p-\frac{p-2}{q}}+(q+1)b^{q-\frac{q+2}{p}}a^{\frac{q+2}{q}}=(p+q)a^{\frac{q+2}{q}}b^{\frac{p-2}{p}}>0,$$

于是 $f(t_0)$ 为最小值，即对 $\forall\, t>0$, 有

$$\frac{1}{p}(ta)^p+\frac{1}{q}\left(\frac{b}{t}\right)^q=f(t)\geqslant f(t_0)=\frac{1}{p}ba^{p-\frac{p}{q}}+\frac{1}{q}ab^{q-\frac{q}{p}}=\frac{1}{p}ab+\frac{1}{q}ab=ab.$$

定理 3.3.4 设 a, b, p, q 都是非负实数，且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则

$$ab\leqslant \frac{1}{p}\,a^p+\frac{1}{q}\,b^q.$$

例 3.3.7 设 $a>b>1$, 求证 $a^{b^a}>b^{a^b}$.

分析 对不等式两边取两次对数之后得

$$\ln\ln a+a\ln b>\ln\ln b+b\ln a.$$

如果记 $x=\dfrac{\ln a}{\ln b}>1,\ y=\ln b>0$, 则只需证明不等式

$$\ln x>y(x\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{xy}).$$

证明 令 $\varphi(x,y)=x\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{xy}\ (x>1,\ y>0)$. 如果 $\varphi(x,y)\leqslant 0$, 则显然有

$$\ln x>y\varphi(x,y).$$

如果 $\varphi(x,y)>0$, 则由

$$\varphi'_y(x,y)=x\mathrm{e}^y-x\mathrm{e}^{xy}<0$$

可知，$\varphi(x,y)$ 关于 y 严格单调减少，故当 $y>0$ 时，$\varphi(x,y)<\lim\limits_{y\to0^+}\varphi(x,y)=x-1$, 而由 $0<\varphi(x,y)=\mathrm{e}^y[x-\mathrm{e}^{(x-1)y}]$ 可知，$(x-1)y<\ln x$, 于是有

$$\ln x>(x-1)y=y\lim_{y\to0^+}\varphi(x,y)>y\varphi(x,y)=y(x\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{xy}).$$

将 $x=\dfrac{\ln a}{\ln b}>1$, $y=\ln b>0$ 代入上式两端，整理可得

$$a^{b^a}>b^{a^b}.$$

例 3.3.8 设 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

满足条件 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2=1\ (i=1,2,\cdots,n)$, 求证

$$-1\leqslant|\boldsymbol{A}|\leqslant 1,$$

其中 $|\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式.

证明 如果 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则结论显然成立. 下面假定 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 并把 $|\boldsymbol{A}|$ 看作 n^2 个变元 $a_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 的函数，记为 $f=|\boldsymbol{A}|$. 又设

$$\varphi_i=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2-1\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

显然我们只需证明在 n 个约束条件

$$\varphi_i=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

的限制下， f 的所有极大值和极小值按其绝对值来说均不超过 1.

作 Lagrange 函数

$$L=f+\frac{\lambda_1}{2}\varphi_1+\frac{\lambda_2}{2}\varphi_2+\cdots+\frac{\lambda_n}{2}\varphi_n,$$

则由 $f=|\boldsymbol{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)$ 可得方程组

$$\frac{\partial L}{\partial a_{ij}}=\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}+\lambda_i a_{ij}=A_{ij}+\lambda_i a_{ij}=0\quad(i,j=1,2,\cdots,n),$$

即

$$A_{ij}+\lambda_i a_{ij}=0\quad(i,j=1,2,\cdots,n),\tag{$*$}$$

用 a_{ij} 乘 $(*)$ 式的两端，并对 j 求和，得

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}+\lambda_i(a_{i1}^2+\cdots+a_{in}^2)=|A|+\lambda_i=0,$$

即

$$|\boldsymbol{A}|+\lambda_i=0\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

由上式解得 $\lambda_i = -|\boldsymbol{A}|\ (i=1,2,\cdots,n)$, 并将其代入 $(*)$ 式，得

$$A_{ij} = a_{ij}|A|\ (i,j=1,2,\cdots,n).$$

于是利用 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的定义及 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 可得

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^T.$$

综上可知， $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ 为单位矩阵就是 f 取得条件极值时所满足的条件，这说明 $f=|\boldsymbol{A}|$ 的所有极大值和极小值按其绝对值均不超过 $|\boldsymbol{A}|^2=1$, 于是对满足条件

$$\varphi_i = 0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

的其他行列式而言，必然有 $|\boldsymbol{A}|^2 \leqslant 1$, 即 $-1 \leqslant |\boldsymbol{A}| \leqslant 1$.

习题 3.3

3.3.1 求证：当 $0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, 有 $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3 \geqslant \cos x$.

3.3.2 求证：当 $x>0$ 时， $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 单调增加；而当 $x>1$ 时， $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}$ 单调减少.

3.3.3 求证：当 $x>1$, $r>1$, 时，有

$$x^r > 1 + r(x-1) + \frac{1}{2}r(r-1)\left(\frac{x-1}{x}\right)^2.$$

3.3.4 利用条件极值证明 Hölder 不等式.

3.3.5 设 $f(x)$ 在长度不超过 2 的区间 I 上满足条件 $|f(x)| \leqslant 1$ 及 $|f''(x)| \leqslant 1$, 求证：对 $\forall\, x \in I$, 有 $|f'(x)| \leqslant 2$.

3.3.6 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可微，并且 $f''(x) < 0\ (a<x<b)$, 求证

$$f(x) > f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \quad (a<x<b).$$

3.3.7 证明：当 n 为奇数，且 $x \neq 0$ 时，有

$$\mathrm{e}^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}; \tag{$*$}$$

当 n 为偶数时，如果 $x>0$, 则 $(*)$ 式仍成立；如果 $x<0$, 则有

$$\mathrm{e}^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

3.3.8 求证：当 $a \neq b$ 时，有 $\dfrac{\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b}{a-b} < \dfrac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b}{2}$.

3.3.9 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可微，且 $f'(a)=f'(b)=0$, 求证：存在 $c \in (a,b)$, 使得

$$|f''(c)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

3.3.10 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二次可微, 并且 $M_k=\sup\limits_{x>0}\{|f^{(k)}(x)|\}<+\infty\ (k=0,1,2)$, 求证

$$M_1^2\leqslant 4M_0M_2.$$

3.3.11 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有三阶导数, 并且 $f(x)$ 及 $f'''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界, 求证 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 也有界.

3.3.12 设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

满足条件 $|a_{ij}|\leqslant M\ (i,j=1,2,\cdots,n)$, 求证 $|A|^2\leqslant n^nM^{2n}$.

3.3.13 证明下列不等式:

(1) 当 $x<1$, 且 $x\neq 0$ 时, 有 $\mathrm{e}^x<\dfrac{1}{1-x}$;

(2) 当 $x>0$, 且 $x\neq 1$ 时, 有 $\ln x<x-1$;

(3) 当 $x>0$ 时, 有 $xy<x\ln x+\mathrm{e}^{y-1}$.

3.4 利用积分学证明不等式

一般来说, 积分形式的不等式常常要借助于积分方法来证明, 包括分部积分, 利用积分的性质及第一、第二中值定理. 主要依据是下面几个定理.

定理 3.4.1 设 $f(x),\ g(x)\in R[a,b]$, 且 $f(x)\leqslant g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

定理 3.4.2 设 $f(x)\in R[a,b]$, 则

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

定理 3.4.3 设 $f(x)\in C[a,b]$, $g(x)\in R[a,b]$, 并且 $g(x)\geqslant 0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

定理 3.4.4 设 $f'(x),\ g'(x)\in R[a,b]$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x).$$

定理 3.4.5 设 $g(x) \in R[a,b]$, $f(x)$ 为单调函数, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.$$

命题 3.4.1 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少, 数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ 非负严格单调减少, 则

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})f(a_k) \leqslant \int_{a_0}^{a_n} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})f(a_{k-1}).$$

命题 3.4.2 设 $f(x)$, $g(x) \in R[a,b]$, 则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

命题 3.4.2 中的不等式是 Cauchy 不等式的积分形式, 它在证明积分不等式时是很有用的. 为了和离散形式相对照, 这里也给出两种证法 (见例 3.1.2).

证明 方法一: 容易看出, 关于 λ 和 μ 的二次型

$$\lambda^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + 2\lambda\mu\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \mu^2\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x = \int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]^2\mathrm{d}x$$

是半正定的, 故有

$$\begin{vmatrix} \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x & \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \\ \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x & \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \end{vmatrix} \geqslant 0,$$

即

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

方法二: 令 $D = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant y \leqslant b\}$, 则由积分的性质可得

$$\iint\limits_D f^2(x)g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x = \iint\limits_D f^2(y)g^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint\limits_D f(x)g(x)f(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2,$$

于是由

$$f^2(x)g^2(y) + f^2(y)g^2(x) - 2f(x)g(y)f(y)g(x) = [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2 \geqslant 0$$

可得

$$\iint\limits_D f^2(x)g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D f^2(y)g^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 2\iint\limits_D f(x)g(x)f(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

综上可得

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

▌

命题 3.4.3 设 $f(x)$, $g(x) \in R[a,b]$.

(1) 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同序的，即对 $\forall\, x$, $y \in [a,b]$, 有

$$[f(x) - f(y)] \cdot [g(x) - g(y)] \geqslant 0,$$

则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x;$$

(2) 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是反序的，即对 $\forall\, x$, $y \in [a,b]$, 有

$$[f(x) - f(y)] \cdot [g(x) - g(y)] \leqslant 0,$$

则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 令 $D = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant y \leqslant b\}$, 则由积分的性质可得

$$\iint\limits_D f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \iint\limits_D f(y)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint\limits_D f(x)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \iint\limits_D f(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

并由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同序可知，对 $\forall\, x$, $y \in [a,b]$, 有

$$f(x)g(x) + f(y)g(y) \geqslant f(x)g(y) + f(y)g(x),$$

于是将上式两端积分，整理可得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

同理可知，如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 反序，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

▌

例 3.4.1 设 $f(x) \in C^1[a,b]$, 且 $f(a)=0$, 求证

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

证明 由 $f(x) \in C^1[a,b]$ 及 $f(a)=0$ 可知, 对 $\forall\, x \in [a,b]$, 有

$$f(x) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,$$

故由命题 3.4.2 中的 Cauchy 不等式可得

$$f^2(x) = \left[\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right]^2 \leqslant \int_a^x [f'(t)]^2\mathrm{d}t \cdot \int_a^x \mathrm{d}t \leqslant (x-a)\int_a^b [f'(t)]^2\mathrm{d}t,$$

于是将上式两端积分, 得

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b [f'(t)]^2\mathrm{d}t \cdot \int_a^b (x-a)\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

例 3.4.2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有有界的导函数, 但不恒为常数, 且 $f(a)=f(b)=0$, 求证: 存在 $c \in (a,b)$, 使得

$$|f'(c)| > \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有有界的导函数, 且 $f(x)$ 不恒为常数可得

$$0 < \sup_{[a,b]}\{|f'(x)|\} < +\infty.$$

记 $M = \sup\limits_{[a,b]}\{|f'(x)|\}$, 由 $f(a)=f(b)=0$ 可知, 当 $a \leqslant x \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ 时, 有

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a) \leqslant |f'(\xi)|(x-a) \leqslant M(x-a),$$

当 $\dfrac{a+b}{2} \leqslant x \leqslant b$ 时, 有

$$f(x) = f(b) + f'(\eta)(x-b) \leqslant |f'(\eta)|(b-x) \leqslant M(b-x),$$

于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant M\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)\mathrm{d}x + M\int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^2}{4}M.\end{aligned}$$

在上面关于 $f(x)$ 的展开式中，两个等号不可能对所有 x 都成立. 反之，如果对 $\forall\, x \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, 有

$$f(x) = M(x-a),$$

并且对 $\forall\, x \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$, 有

$$f(x) = M(b-x),$$

则由 $f(x)$ 在点 $x = \dfrac{a+b}{2}$ 可导，得

$$-M = f'_+\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'_-\left(\frac{a+b}{2}\right) = M,$$

这与 $M > 0$ 矛盾. 此矛盾说明，存在 $x^* \in [a,b]$, 使得

$$f(x^*) < M(x^*-a)$$

或

$$f(x^*) < M(b-x^*).$$

又由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可知，这两个不等式中至少有一个在包含 x^* 的一个小闭区间成立，于是上述整个积分不等式是一个严格不等式，即

$$M > \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

由上式及上确界的定义可知，必存在一点 $c \in (a,b)$, 使

$$|f'(c)| > \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例 3.4.3 设 $f(x) \in C^2[a,b]$ 且 $f(a) = f(b) = 0$, 求证

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\max_{[a,b]}\{f''(x)|\}.$$

证明 方法一：由 $f(x) \in C^2[a,b]$, $f(a) = f(b) = 0$ 及分部积分公式可得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}(x-a) = (x-a)f(x)\Big|_a^b - \int_a^b (x-a)f'(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_a^b (x-a)f'(x)\mathrm{d}(x-b) \\ &= -(x-a)(x-b)f'(x)\Big|_a^b + \int_a^b (x-b)\mathrm{d}[(x-a)f'(x)]\end{aligned}$$

$$= \int_a^b (x-b)f'(x)\mathrm{d}x + \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x$$
$$= -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x,$$

再由积分中值定理可得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi),$$

于是

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f''(x)|\}.$$

方法二：由 $f(x)\in C^2[a,b]$ 及 Taylor 公式可知，对 $\forall\, x\in[a,b]$, 有

$$f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(a-x)^2,$$
$$f(b) = f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{1}{2}f''(\eta)(b-x)^2,$$

将上式两端相加，并利用 $f(a)=f(b)=0$ 可得

$$0 = 2f(x) + f'(x)(a+b-2x) + \frac{f''(\xi)(a-x)^2 + f''(\eta)(b-x)^2}{2},$$

从而对 $\forall\, x\in[a,b]$, 有

$$f(x) = f'(x)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big) - \frac{f''(\xi)(a-x)^2 + f''(\eta)(b-x)^2}{4}.$$

将上式两端积分，并利用 $f(a)=f(b)=0$ 可得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)\mathrm{d}f(x) - \int_a^b \frac{f''(\xi)(a-x)^2 + f''(\eta)(b-x)^2}{4}\mathrm{d}x$$
$$= -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \frac{f''(\xi)(a-x)^2 + f''(\eta)(b-x)^2}{4}\mathrm{d}x,$$

移项并取绝对值，得

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{8}\max_{[a,b]}\{|f''(x)|\}\cdot\int_a^b [(x-a)^2+(x-b)^2]\mathrm{d}x$$
$$= \frac{(b-a)^3}{12}\max_{[a,b]}\{|f''(x)|\}.$$

例 3.4.4 设 $f(x)\in C^1[a,b]$, $f(a)=0$, 且对 $\forall\, x\in[a,b]$, 有 $0\leqslant f'(x)\leqslant 1$, 求证

$$\int_a^b f^3(x)\mathrm{d}x \leqslant \left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2.$$

证明 作积分上限函数

$$\varphi(t)=\int_a^t f^3(x)\mathrm{d}x-\left[\int_a^t f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \quad (a\leqslant t\leqslant b),$$

则 $\varphi'(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且

$$\varphi'(t)=f^3(t)-2f(t)\int_a^t f(x)\mathrm{d}x=f(t)\left[f^2(t)-2\int_a^t f(x)\mathrm{d}x\right].$$

记 $\psi(t)=f^2(t)-2\int_a^t f(x)\mathrm{d}x\ (a\leqslant t\leqslant b)$, 则由 $0\leqslant f'(x)\leqslant 1$, $f(a)=0$ 可得

$$\psi'(t)=2f(t)f'(t)-2f(t)=2[f'(t)-1]\int_a^t f'(x)\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

于是 $\psi(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少，且由

$$\psi(t)\leqslant\psi(a)=f^2(a)-2\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$$

可得

$$\varphi'(t)=\psi(t)f(t)=\psi(t)\int_a^t f'(x)\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

综上可知， $\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少，且 $\varphi(t)\leqslant\varphi(a)=0$, 从而 $\varphi(b)\leqslant 0$, 即

$$\int_a^b f^3(x)\mathrm{d}x\leqslant\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2.$$

例 3.4.5 设 $f(x)\in C[0,1]$, 且对 $\forall\, x\in[a,b]$, 有 $0\leqslant f(x)<1$, 求证

$$\int_0^1\frac{f(x)}{1-f(x)}\mathrm{d}x\geqslant\frac{\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{1-\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}.$$

证明 由 $f(x)\in C[0,1]$ 及 $0\leqslant f(x)<1$ 可知， $\max\limits_{[a,b]}\{f(x)\}<1$, 于是

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{f(x)}{1-f(x)}\cdot[1-f(x)]\mathrm{d}x. \qquad (*)$$

容易验证 $\dfrac{f(x)}{1-f(x)}$ 与 $1-f(x)$ 是反序的，故由上式及命题 3.4.3 可得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{f(x)}{1-f(x)}\mathrm{d}x\cdot\int_0^1[1-f(x)]\mathrm{d}x,$$

于是整理可得

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)}\mathrm{d}x \geqslant \frac{\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{1-\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}.$$

请读者把例 3.4.5 中的不等式转换为离散形式，并给予证明.

例 3.4.6 设 $f(x)$ 是 $[0,2\pi]$ 上的凸函数， $f'(x)$ 存在且有界，求证

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \geqslant 0 \quad (n=1,2,\cdots).$$

证明 由 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上是凸函数及 $f'(x)$ 存在且有界可知， $f'(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上单调增加且有界，故 $f'(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上可积，于是根据分部积分公式和积分第二中值定理可知，对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x &= \frac{1}{n}f(x)\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin nx\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin nx\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{n}\left[f'(0)\int_0^{\xi}\sin nx\mathrm{d}x + f'(2\pi)\int_{\xi}^{2\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right]\\ &= -\frac{1}{n}\left[f'(0)\frac{1-\cos n\xi}{n} + f'(2\pi)\frac{\cos n\xi - 1}{n}\right]\\ &= \frac{1-\cos n\xi}{n^2}\,[f'(2\pi)-f'(0)] \geqslant 0.\end{aligned}$$

例 3.4.7 设 $f(x)\in C[0,1]$, 但不恒等于常数，且 $f(x)>0\ (0\leqslant x\leqslant 1)$, 求证:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x < \frac{(M+m)^2}{4mM},$$

其中 $M=\max\limits_{[0,1]}\{f(x)\}$, $m=\min\limits_{[0,1]}\{f(x)\}$.

证明 对 $\forall\, x\in[0,1]$, 由 $f(x)>0$ 可得

$$\frac{[f(x)-m][f(x)-M]}{f(x)} = f(x)-(M+m)+\frac{Mm}{f(x)} \leqslant 0,$$

于是由 $f(x)\in C[0,1]$ 且不恒等于常数可知，上式不恒等于零. 将上式两端积分，并整理可得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{mM}{f(x)}\,\mathrm{d}x < M+m.$$

将上式两端乘以 $\int_0^1 \frac{mM}{f(x)}\mathrm{d}x$ 可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 \frac{mM}{f(x)}\mathrm{d}x &< (M+m)\int_0^1 \frac{mM}{f(x)}\mathrm{d}x-\left[\int_0^1 \frac{mM}{f(x)}\mathrm{d}x\right]^2\\ &=\frac{(M+m)^2}{4}-\left[\int_0^1 \frac{mM}{f(x)}\mathrm{d}x-\frac{M+m}{2}\right]^2\\ &\leqslant \frac{(m+M)^2}{4},\end{aligned}$$

从而

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x<\frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

习题　3.4

3.4.1 设 $f(x)\in C^1[a,b]$, 且 $f(a)=0$, 求证

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\max_{[a,b]}\{|f'(x)|\}.$$

3.4.2 设 $f(x)\in C[a,b]$, 且 $f(x)>0\ (a\leqslant x\leqslant b)$, 求证

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant (b-a)^2.$$

3.4.3 设 $a<0<b$, $f(x)\in R[a,b]$, $f(x)\geqslant 0$, 且 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=0$, 求证

$$\int_a^b x^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant -ab\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

3.4.4 设 $f(x)\in C^1[a,b]$, 求证

$$\max_{[a,b]}\{|f(x)|\}\leqslant \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

3.4.5 (Чебышёв[①]不等式) 设 $p(x)\in R[a,b]$, $p(x)>0$, 而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的单调函数，并具有相同的单调性，求证

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

(提示：参考例 3.1.3.)

---

① Чебышёв, 切比雪夫， 1821—1894, 俄国.

3.4.6 设 $f(x)\in C^{2n}[a,b]$, $|f^{(2n)}(x)|\leqslant M$, $f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0\ (k=0,1,\cdots,n-1)$, 求证

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(n!)^2M}{(2n)!(2n+1)!}(b-a)^{2n+1}.$$

3.4.7 设 $p_n(x)$ 为 n 次代数多项式, 求证

$$\int_a^b |p_n'(x)|\mathrm{d}x\leqslant 2n\max_{[a,b]}\{|p_n(x)|\}.$$

3.4.8 设 $f(x)\in C^1[a,b]$, $f(a)=f(b)=0$, 并且 $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=1$, 求证

$$\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x\cdot\int_a^b x^2f^2(x)\mathrm{d}x>\frac{1}{4}.$$

3.4.9 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上单调减少, 求证: 对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2n+1)x\mathrm{d}x\leqslant 0\leqslant\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 2nx\mathrm{d}x.$$

3.4.10 求证 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2\mathrm{d}x>0.$

3.4.11 设 $f(x)\in C^2[a,b]$, 且 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$, 求证

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(b-a)^3}{24}\max_{[a,b]}\{|f''(x)|\}.$$

3.4.12 设 $f(x)\in C^1[a,b]$, 且 $f(1)-f(0)=1$, 求证

$$\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant 1.$$

3.4.13 设 $\mathrm{e}^2<a<b$, 求证

$$\int_a^b\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x<\frac{2b}{\ln b}.$$

3.4.14 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微且有界, 并满足

$$|f(x)+f'(x)|\leqslant 1\quad(-\infty<x<+\infty),$$

求证 $|f(x)|\leqslant 1$.

3.4.15 设 $f(x)\in C^1[0,1]$, 求证

$$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\max\left\{\int_0^1|f'(x)|\mathrm{d}x,\ \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\right\}.$$

3.4.16 设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, $f(x)>0$, 并对所有的 t, 皆有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 1,$$

求证：对任意的 a, b $(a<b)$, 有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}+1.$$

(提示：对连续函数 $F(t)=\int_a^b \mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 上积分.)

3.4.17　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减少，求证：对 $\forall\, a\in(0,1)$, 有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

3.4.18　设 $f(x)\in C[0,1]$, 且 $f(x)$ 单调增加，求证

$$\frac{\displaystyle\int_0^1 xf^3(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x} \geqslant \frac{\displaystyle\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}.$$

3.5　估值问题

在数学分析中，需要对变量进行估值的问题很多. 例如，利用单调有界原理证明数列极限存在时就需要估计这个数列的上界 (或下界); 在讨论级数或无穷积分的收敛性 (或一致收敛性) 时，要寻找优级数、强函数，就得对级数的一般项或带有变动上、下限的积分进行估计；等等.

估值问题与不等式的证明密切相关，但又不是一回事. 证明不等式时，变量之间的不等关系常常是已知的，只是论证这种关系成立. 而在估值问题中，则是根据需要去寻求变量之间的大小关系. 不等式可以作为估值的工具，对变量进行比较准确的估计，是一种非常重要的分析技巧.

常用的估值方法或思路是：通过对变量作初等变形并借助已知不等式进行放缩；利用二项式定理和 Taylor 公式进行展开并根据需要做出取舍或对其余项进行估计；以微分学 (包括导数、中值定理等) 为工具，分析变量的单调性和极值，从而估计其上、下确界；以积分学为工具，利用积分的性质和第一、第二中值定理 (在离散情形则需要借助 Abel 变换和 Abel 引理), 对带有变动上、下限的积分 (或有限项的和) 进行估值.

在对变量进行估计时，要尽可能地“精打细算”，不要一下子放 (缩) 得过大.

例 3.5.1　对有限和 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^p}$ $(p\geqslant 1)$ 及无限和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^p}$ $(p>1)$ 给出估值.

解　利用积分性质可得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^p}\leqslant 1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=1+\int_1^n\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x,$$

于是当 $p=1$ 时，有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant 1+\ln n;$$

当 $p>1$ 时，有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}\leqslant 1+\frac{1}{p-1}-\frac{1}{(p-1)n^{p-1}}=\frac{p}{p-1}-\frac{1}{(p-1)n^{p-1}}.$$

由于上式对任意的正整数 n 都成立，于是

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}\leqslant\frac{p}{p-1}.$$

特别地，当 p 为正整数时，我们给出几个估计式：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leqslant 2-\frac{1}{n},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\leqslant 2;$$
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}\leqslant \frac{3}{2}-\frac{1}{2n^2},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\leqslant \frac{3}{2};$$
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}\leqslant \frac{4}{3}-\frac{1}{3n^3},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\leqslant \frac{4}{3}.$$

例 3.5.2 对无限和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sqrt{\arctan\frac{1}{n^2+n+1}}$ 给出其上限的估计.

解 为了便于估计，应当去掉根号，于是利用 Cauchy 不等式可得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\sqrt{\arctan\frac{1}{k^2+k+1}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{k^2+k+1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

根据恒等式

$$\arctan\frac{1}{k^2+k+1}=\arctan\frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)}=\arctan(k+1)-\arctan k$$

可知，对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{k^2+k+1}=\arctan(n+1)-\arctan 1,$$

从而

$$\sum_{k=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{k^2+k+1}=\lim_{n\to\infty}\arctan(n+1)-\arctan 1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

又由例 3.5.1 可知，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\leqslant\frac{4}{3}$, 于是

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sqrt{\arctan\frac{1}{k^2+k+1}}\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{3}}.$$

例 3.5.3 讨论下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1\right)$.

解 (1) 由 Taylor 展开式得

$$2^{\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{\sqrt{n}\ln 2} = 1 + \sqrt{n}\ln 2 + \frac{1}{2!}n\ln^2 2 + \frac{1}{3!}n\sqrt{n}\ln^3 2 + \cdots > \frac{\ln^3 2}{3!}n\sqrt{n}.$$

所以

$$\frac{1}{2^{\sqrt{n}}} < \frac{6}{\ln^3 2} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

于是由比较判别法可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ 收敛.

(2) 直接估计 $a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1$ 不方便, 但变形为 $1 + a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}}$ 就好办了. 对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 由 $a_n > 0$ 可得

$$\begin{aligned} n &= (1+a_n)^{n^2+1} = 1 + (n^2+1)a_n + \frac{1}{2!}n^2(n^2+1)a_n^2 + \cdots \\ &> \frac{1}{2}n^2(n^2+1)a_n^2 > \frac{1}{2}n^4 a_n^2, \end{aligned}$$

所以

$$a_n < \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}},$$

于是由比较判别法可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1\right)$ 收敛.

例 3.5.4 设 $a > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上满足 Lipschitz① 条件, 即存在常数 $L > 0$, 使得对 $\forall\, x,\ y \in [a, +\infty)$, 有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|,$$

求证 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

证明 对 $\forall\, x_1, x_2 \in [a, +\infty)$, 显然要估计

$$\left|\frac{f(x_1)}{x_1} - \frac{f(x_2)}{x_2}\right|,$$

并希望得到不等式

$$\left|\frac{f(x_1)}{x_1} - \frac{f(x_2)}{x_2}\right| \leqslant M|x_1 - x_2| \quad (\text{其中 } M \text{ 为常数}).$$

---

① Lipschitz, 李普希茨, 1832—1903, 德国.

为此先作初等变形

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}\right| &= \frac{|f(x_1)(x_2-x_1)+x_1[f(x_1)-f(x_2)]|}{x_1x_2}\\ &\leqslant \frac{|f(x_1)||x_1-x_2|+x_1|f(x_1)-f(x_2)|}{x_1x_2}\\ &\leqslant \left|\frac{f(x_1)}{x_1}\right|\left|\frac{x_1-x_2}{x_2}\right|+\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{x_2}.\end{aligned}$$

最后不等式右端的第二项可利用 Lipschitz 条件进行估计:

$$\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{x_2}\leqslant \frac{L}{a}|x_1-x_2|.$$

为了估计第一项，先要证明 $\dfrac{f(x)}{x}$ 有界. 事实上

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant \frac{|f(x)-f(a)|}{x}+\frac{|f(a)|}{x}\leqslant L\frac{|x-a|}{x}+\frac{|f(a)|}{a}\leqslant L+\frac{|f(a)|}{a},$$

于是可选取 $M=\dfrac{aL+|f(a)|}{a^2}$, 并且对 $\forall\, x_1,x_2\in[a,+\infty)$, 有

$$\left|\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}\right|\leqslant\left[L+\frac{|f(a)|}{a}\right]\frac{|x_1-x_2|}{a}+\frac{L}{a}|x_1-x_2|\leqslant M|x_1-x_2|.$$

由此可推出 $\dfrac{f(x)}{x}$ 为一致连续的.

例 3.5.5 设 $a_n=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}$ $(n=1,2,\cdots)$, 求证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 条件收敛.

分析 显然有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$, 故 $\{a_n\}$ 单调减少. 为了证明级数条件收敛，我们既要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 又要证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. 因此要从大小两个方向对 a_n 进行估计，有放又有缩.

由于 a_n 中这种因子结构特点，自然希望通过将各个因子适当放缩后能够彼此相消而得到简化. 为此我们先把因子个数放大一倍，再进行放缩，即先估计 a_n^2.

证明 对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, $n>1$, 由 $\dfrac{n-1}{n}<\dfrac{n}{n+1}$ 可得

$$\begin{aligned}a_n^2&=\frac12\cdot\frac12\cdot\frac34\cdot\frac34\cdot\frac56\cdot\frac56\cdot\frac78\cdot\frac78\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-1}{2n}\\ &<\frac12\cdot\frac23\cdot\frac34\cdot\frac45\cdot\frac56\cdot\frac67\cdot\frac78\cdot\frac89\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{2n+1},\\ a_n^2&=\frac12\cdot\frac12\cdot\frac34\cdot\frac34\cdot\frac56\cdot\frac56\cdot\frac78\cdot\frac78\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-1}{2n}\\ &>\frac12\cdot\frac12\cdot\frac23\cdot\frac34\cdot\frac45\cdot\frac56\cdot\frac67\cdot\frac78\cdot\cdots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{2n}=\frac{1}{4n},\end{aligned}$$

于是由 $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < a_n < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ 可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 条件收敛.

例 3.5.6 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\ (a_n>0)$ 发散，令 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, 求证：当 $p\leqslant 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{s_n^p}$ 发散.

证明 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散及 $a_n>0$ 可知，$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=+\infty$, 故当 n 充分大时，$s_n^p\leqslant s_n$, 于是根据 Cauchy 收敛原理，需要估计级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{s_n^p}$ 的“片段和”：

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{a_{k+n}}{s_{k+n}^p}\geqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{a_{k+n}}{s_{k+n}}>\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+m}}{s_{n+m}}=\frac{s_{n+m}-s_n}{s_{n+m}}=1-\frac{s_n}{s_{n+m}}.$$

对每一个固定的正整数 n, 由 $\lim\limits_{m\to\infty}s_{n+m}=+\infty$ 可知，当 m 充分大时，有

$$\frac{s_n}{s_{n+m}}<\frac{1}{2},$$

于是对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 存在 $m\in\mathbb{Z}^+$, 使得 $m>n$, 且

$$\frac{a_{n+1}}{s_{n+1}^p}+\frac{a_{n+2}}{s_{n+2}^p}+\cdots+\frac{a_{n+m}}{s_{n+m}^p}>1-\frac{s_n}{s_{n+m}}>\frac{1}{2}.$$

由此可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{s_n^p}$ 发散.

例 3.5.7 设 $0<p_1<p_2<\cdots<p_n<\cdots$, 求证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{p_n}$ 收敛的充分必要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$ 收敛.

证明 充分性：设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$ 收敛，则由不等式

$$\frac{n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}>\frac{n}{np_n}=\frac{1}{p_n}\quad(n=1,2,\cdots)$$

可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{p_n}$ 收敛.

必要性：我们先来估计级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$ 的一般项.

对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 当 $n=2m$ 时，有

$$\frac{2m}{p_1+p_2+\cdots+p_{2m}}<\frac{2m}{p_m+p_{m+1}+\cdots+p_{2m}}<\frac{2m}{(m+1)p_m}<\frac{2}{p_m},$$

当 $n=2m+1$ 时，有

$$\frac{2m+1}{p_1+p_2+\cdots+p_{2m+1}}<\frac{2m+1}{p_m+p_{m+1}+\cdots+p_{2m+1}}<\frac{2m+1}{(m+2)p_m}<\frac{2}{p_m},$$

从而当 $n \geqslant 2$ 时，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{p_1+p_2+\cdots+p_k} &= \frac{1}{p_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{p_1+p_2+\cdots+p_k}\\ &< \frac{1}{p_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{p_{[\frac{k}{2}]}} < \frac{1}{p_1}+\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\frac{4}{p_k}\\ &< \frac{1}{p_1}+4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}.\end{aligned}$$

由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ 收敛可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$ 收敛.

例 3.5.8 设 $p>0$, $a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\sin\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性.

解 显然要估计 a_n. 令 $t=\frac{1}{x^p}$, 则

$$a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\sin\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\int_{n^p}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{1+\frac{1}{p}}}\,\mathrm{d}t.$$

上式右端积分对每一个正整数 n 都是绝对收敛的. 下面估计它的值.

对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $A>0$, 使得 $A>n^p$, 且

$$\left|\frac{1}{p}\int_A^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{1+\frac{1}{p}}}\,\mathrm{d}t\right|<\varepsilon,$$

于是

$$|a_n|\leqslant\left|\frac{1}{p}\int_{n^p}^{A}\frac{\sin t}{t^{1+\frac{1}{p}}}\,\mathrm{d}t\right|+\left|\frac{1}{p}\int_{A}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{1+\frac{1}{p}}}\,\mathrm{d}t\right|<\left|\frac{1}{p}\int_{n^p}^{A}\frac{\sin t}{t^{1+\frac{1}{p}}}\,\mathrm{d}t\right|+\varepsilon.$$

又因为 $\frac{1}{t^{1+\frac{1}{p}}}$ 在 $[n^p,A]$ 上是单调减少的，所以由积分第二中值定理可得

$$\left|\int_{n^p}^{A}\frac{\sin t}{t^{1+\frac{1}{p}}}\,\mathrm{d}t\right|=\left|\frac{1}{n^{1+p}}\int_{n^p}^{\xi}\sin t\mathrm{d}t\right|=\frac{1}{n^{1+p}}|\cos\xi-\cos n^p|\leqslant\frac{2}{n^{1+p}},$$

于是由 ε 逼迫原理可知，对 $\forall\,n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$|a_n|\leqslant\frac{2}{p}\cdot\frac{1}{n^{1+p}}.$$

由此可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是绝对收敛的.

例 3.5.9 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ 是从调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 中按顺序去掉分母中含有数字 5 的那些项所组成的级数，求证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ 收敛.

证明 我们来寻求被去掉的项和剩余的项之间的数量关系.

在 $1 \sim \frac{1}{9}$ 这 9 个项中，去掉 1 项为 $\frac{1}{5}$, 余下的项数为

$$9-1=8;$$

在 $\frac{1}{10} \sim \frac{1}{99}$ 这 90 项中，去掉的项为

$$\frac{1}{15}, \frac{1}{25}, \frac{1}{35}, \frac{1}{45}, \frac{1}{65}, \frac{1}{75}, \frac{1}{85}, \frac{1}{95}$$

及

$$\frac{1}{50}, \frac{1}{51}, \frac{1}{52}, \frac{1}{53}, \frac{1}{54}, \frac{1}{55}, \frac{1}{56}, \frac{1}{57}, \frac{1}{58}, \frac{1}{59},$$

共去掉 $8+10=18$ 项，余下的项数为

$$90-18=8\times 9;$$

在 $\frac{1}{100} \sim \frac{1}{999}$ 这 900 项中，去掉的项数为 $19\times 8+100=252$, 余下的项数为

$$900-252=648=8\times 9^2.$$

一般地，在 $\frac{1}{10^{k-1}} \sim \frac{1}{10^k-1}$ 这 10^k-10^{k-1} 项中，余下的项数为

$$8\times 9^{k-1}\ (k=1,2,\cdots).$$

由上述讨论可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ 的前 $n_1=8$ 项和满足

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_{n_1}}<1\times 8=8;$$

前 $n_2=8+8\times 9=n_1+8\times 9$ 项和满足

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_{n_2}}<1\times 8+\frac{1}{10}\times 8\times 9=8\left(1+\frac{9}{10}\right);$$

前 $n_3=8+8\times 9+8\times 9^2=n_2+8\times 9^2$ 项之和满足

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_{n_3}}<8\left[1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2\right].$$

一般地，前 $n_k=n_{k-1}+8\times 9^{k-1}$ 项之和满足

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_{n_k}}<8\left[1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\cdots+\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\right].$$

因为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}8\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n$ 收敛，且和为 72, 所以不论 n 取何值，都有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}<72,$$

从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ 收敛.

习题 3.5

3.5.1 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 的收敛性.

3.5.2 设 $a>0$, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$ 的收敛性.

3.5.3 设 $a_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x$, 求证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 是条件收敛的.

3.5.4 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$ 的收敛性.

3.5.5 讨论下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\displaystyle\int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^2 2+\ln^2 3+\cdots+\ln^2 n}{n^\alpha}$.

3.5.6 讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x(1-x)^n}{\sqrt{n+x}}$ 在区间 $[0,1]$ 上的一致收敛性.

3.5.7 求证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$ 收敛，其中 $\{p_n\}$ 是由互不相同的自然数组成的数列 (不一定按大小顺序排列).

3.5.8 设 $f(x)\equiv 0$, $f_1(x)\in R[a,b]$, 定义函数列

$$f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t\quad(n=1,2,\cdots),$$

求证函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

3.5.9 证明下列函数项级数在所示区间上是一致收敛的:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx}\quad(0\leqslant x<+\infty)$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})\quad\left(\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\right)$.

3.5.10 讨论下列级数在给定区间上的一致收敛性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}\quad(0\leqslant x<+\infty)$;

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\sqrt{x^2+\dfrac{1}{(n-1)^2}}-\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}\right]\quad(-\infty<x<+\infty)$.

3.5.11 设 $f_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续，且 $\{f_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 $f(x)$, 求证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

3.5.12 设 $f_n(x)\in C[a,b]\ (n=1,2,\cdots)$, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无零点，求证 $\left\{\dfrac{1}{f_n(x)}\right\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $\dfrac{1}{f(x)}$.

3.5.13 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\ (a_n>0)$ 收敛， $r_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k$, 求证：当 $p\geqslant 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{r_n^p}$ 发散.

3.5.14　设 $p>1$, 求证

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}<p.$$

3.5.15　设 $\varphi_n(x)\in C[0,1]$, 且

$$\int_0^1\varphi_n^2(x)\mathrm{d}x=1\quad(n=1,2,\cdots),$$

求证：存在 $N\in\mathbb{Z}^+$ 及实数 $c_1,c_2,\cdots,c_N$, 使得 $\sum\limits_{k=1}^{N}c_k^2=1$, 且

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|\sum_{k=1}^{N}c_k\varphi_k(x)\right|\geqslant 100.$$

(提示：取 $N>10000$.)

第 4 章　几种运算次序的交换性

数学分析中经常遇到各种运算次序的交换问题，这些运算包括求和、求导、求积分和求极限等. 通过交换运算次序，往往能使许多困难问题获得解决. 因此掌握各种运算次序的交换规则并运用其来处理和解决有关问题，是数学分析方法中的一个重要组成部分. 在研究各种运算次序的交换问题时，一致收敛是不可缺少的一个重要概念.

4.1　一致收敛性

本节仅限于研究函数项级数和含参变量无穷积分的一致收敛性问题.

4.1.1　函数项级数的一致收敛性

定义 4.1.1 设 $f(x)$, $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 都是定义在区间 I (其中 I 是有穷或无限区间) 上的函数. 如果对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{Z}^+$, 当 $n>N$ 时，对 $\forall\,x\in I$, 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$.

定义 4.1.2 设 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是定义在区间 I (其中 I 是有穷或无限区间) 上的函数，且 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$ $(n=1,2,\cdots)$. 如果函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛，则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

下面不加证明地给出几个判断函数列或函数项级数一致收敛的判别法.

定理 4.1.1 (Cauchy 收敛原理)

函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛的充分必要条件是：对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{Z}^+$, 当 $n>N$ 时，对 $\forall\,p\in\mathbb{Z}^+$ 及 $\forall\,x\in I$, 皆有

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon.$$

定理 4.1.1′ (Cauchy 收敛原理)

函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛的充分必要条件是：对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{Z}^+$, 当 $n>N$ 时，对 $\forall\,p\in\mathbb{Z}^+$ 及 $\forall\,x\in I$, 皆有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|<\varepsilon.$$

定理 4.1.2 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0.$$

定理 4.1.2′ 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}\left|\sum_{k=n}^{\infty}u_k(x)\right|=0.$$

定理 4.1.3 (Weierstrass 判别法)

设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 收敛，且对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$|u_n(x)|\leqslant M_n\quad(x\in I),$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上绝对且一致收敛.

定理 4.1.4 (Abel 判别法)

设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛，函数列 $\{a_n(x)\}$ 对每一个 $x\in I$ 关于 n 是单调的，且在 I 上一致有界，即存在 $M>0$, 使得对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$|a_n(x)|\leqslant M\quad(x\in I),$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

定理 4.1.5 (Dirichlet 判别法)

设函数列 $\{a_n(x)\}$ 对每一个 $x\in I$ 关于 n 是单调的，并且它在区间 I 上一致收敛于零，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 的部分和序列在 I 上一致有界，即存在 $M>0$, 使得对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}b_k(x)\right|\leqslant M\quad(x\in I),$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

在判定函数列或函数项级数在某一区间上不一致收敛时，除了根据定义、定理 4.1.1 和定理 4.1.2 之外，还可使用下面的命题.

命题 4.1.1 设 $u_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 在区间 I 上连续，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上收敛于 $S(x)$. 如果和函数 $S(x)$ 在 I 上不连续，则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上不一致收敛.

命题 4.1.2 设 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是定义在区间 I 上的函数，且满足下列条件之一，则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上不一致收敛.

(1) 存在数列 $\{x_n\} \subset I$, 使得数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_n)$ 发散;

(2) 对 $\forall\, x \in I$, 有 $u_n(x) > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$, 且存在数列 $\{x_n\} \subset I$, 使得

$$\varliminf_{n\to\infty} n^{\lambda} u_n(x_n) > 0 \quad (\lambda \leqslant 1);$$

(3) $u_n(x) = \dfrac{a_n(x)}{b_n(x)}\ (x \in I,\ n = 1, 2, \cdots)$, 对每个 $x \in I$, $a_n(x)$ 与 $b_n(x)$ 均为关于 n 的单调增加的正值函数, 且存在数列 $\{x_n\} \subset I$, 使得

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{n a_n(x_n)}{b_{2n}(x_n)} > 0.$$

证明 (1) 由数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_n)$ 发散可知, 当 $n \to \infty$ 时, $r_n(x_n) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x_k)$ 不趋于零, 故存在 $\varepsilon_0 > 0$ 及 $n_k > k\ (k = 1, 2, \cdots)$, 使得

$$|r_{n_k}(x_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0,$$

从而

$$\sup_{x\in I} |r_{n_k}(x)| \geqslant \varepsilon_0 \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

由上式可知,

$$\sup_{x\in I} |r_n(x)| \not\to 0 \quad (n \to \infty),$$

从而根据定理 4.1.2′ 可知, 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上不一致收敛.

(2) 设 $\varliminf\limits_{n\to\infty} n^{\lambda} u_n(x_n) = q > 0$, 则由 $u_n(x) > 0\ (x \in I,\ n = 1, 2, \cdots)$ 及下极限的性质可知, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $n^{\lambda} u_n(x_n) > \dfrac{q}{2}$, 即

$$u_n(x_n) > \frac{q}{2n^{\lambda}} \quad (n > N).$$

因为当 $\lambda \leqslant 1$ 时, 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{q}{2n^{\lambda}}$ 发散, 所以由比较判别法可知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_n)$ 发散, 从而由 (1) 中已证得的结论可知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上不一致收敛.

(3) 设 $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{n a_n(x_n)}{b_{2n}(x_n)} = q > 0$, 则由 $u_n(x) > 0\ (x \in I,\ n = 1, 2, \cdots)$ 及下极限的性质可知, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$\frac{n a_n(x_n)}{b_{2n}(x_n)} > \frac{q}{2},$$

于是当 $n > N$ 时, 有

$$\frac{a_n(x_n)}{b_n(x_n)} + \frac{a_{n+1}(x_n)}{b_{n+1}(x_n)} + \cdots + \frac{a_{2n}(x_n)}{b_{2n}(x_n)} \geqslant \frac{(n+1)a_n(x_n)}{b_{2n}(x_n)} \geqslant \frac{n a_n(x_n)}{b_{2n}(x_n)} > \frac{q}{2}.$$

根据 Cauchy 收敛原理可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n(x)}{b_n(x)}$ 在 I 上不一致收敛. ▌

例 4.1.1 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-1}{n}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

解 对 $\forall\, a>0$, 我们分别在 $[0,a]$ 和 $[a,+\infty)$ 上进行讨论.

(1) 在 $[0,a]$ 上:

在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-1}{n}$ 的一般项 $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-1}{n}$ 中，已经有一个 $\dfrac{1}{n}$ 的因子，对于级数收敛来说这还不够，但由于 x 有界，而 $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-1)=0$, 这意味着当 $n\to\infty$ 时，在 $\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-1$ 中包含与 n 相关的无穷小因子，因此，我们有理由去寻找控制函数. 为此，我们将 $\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}$ 进行展开:

$$0<\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-1\leqslant \mathrm{e}^{\frac{a}{n}}-1=\frac{a}{n}+\frac{1}{2!}\left(\frac{a}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{a}{n}\right)^n+\cdots.$$

我们对上式右边展开式加以放大，当 $n>a$ 时，有

$$0<\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-1<\frac{a}{n}+\left(\frac{a}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{a}{n}\right)^n+\cdots=\frac{\frac{a}{n}}{1-\frac{a}{n}}=\frac{a}{n-a},$$

于是当 n 充分大时，有

$$\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-1}{n}\leqslant\frac{a}{n(n-a)}.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a}{n(n-a)}$ 收敛，根据 Weierstrass 判别法可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-1}{n}$ 在 $[0,a]$ 上一致收敛.

(2) 在 $[a,+\infty)$ 上:

取 $x_n=n\ (n=1,2,\cdots)$, 显然当 n 充分大时，$x_n\in[a,+\infty)$, 代入得

$$\frac{\mathrm{e}^{\frac{x_n}{n}}-1}{n}=\frac{\mathrm{e}-1}{n},$$

而由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}-1}{n}$ 发散可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-1}{n}$ 在 $[a,+\infty)$ 上不一致收敛.

例 4.1.2 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n\ln\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上的一致收敛性.

解 对 $\forall\,\delta\in(0,1)$, 我们分别在 $(0,\delta)$ 和 $(\delta,1)$ 上进行讨论.

(1) 在区间 $(0,\delta)$ 上:

对 $\forall\, x\in(0,\delta)$, 显然有

$$0<x^n\ln\frac{1}{x}<x^n\cdot\frac{1}{x}=x^{n-1}<\delta^{n-1},$$

从而由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\delta^{n-1}$ 收敛可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n\ln\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,\delta)$ 上一致收敛.

(2) 在区间 $(\delta,1)$ 上：

取 $x_n=\dfrac{1}{\sqrt[n]{\mathrm{e}}}$ $(n=1,2,\cdots)$, 当 n 充分大时，易见 $x_n\in(\delta,1)$, 而

$$x_n^n\ln\frac{1}{x_n}=\left(\frac{1}{\sqrt[n]{\mathrm{e}}}\right)^n\ln\sqrt[n]{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot\frac{1}{n},$$

从而由 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散及命题 4.1.2 可知， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\ln\dfrac{1}{x}$ 在 $(\delta,1)$ 上不一致收敛.

例 4.1.3 设 $a>0$, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$ 在区间 $[0,a]$ 和区间 $[a,+\infty)$ 上的一致收敛性.

解 令 $u_k(x)=\dfrac{kx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+kx)}$, $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$, $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$.

方法一：因为对 $\forall\, k\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\begin{aligned}u_k(x)&=\frac{(1+kx)-1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+kx)}\\&=\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots[1+(k-1)x]}-\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+kx)},\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k(x)=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}\right]=\begin{cases}0, & x=0,\\1, & x>0,\end{cases}$$

于是由命题 4.1.1 可知，原级数在 $[0,a]$ 上不一致收敛.

又因为当 $x\geqslant a$ 时，对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\sup_{x\geqslant a}|S_n(x)-S(x)|=\frac{1}{(1+a)(1+2a)\cdots(1+na)}\leqslant\frac{1}{(1+a)^n},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\geqslant a}|S_n(x)-S(x)|=0,$$

于是由定理 4.1.2 可知，原级数在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛.

方法二：令 $a_n(x)=nx$, $b_n(x)=(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)$ $(0\leqslant x\leqslant a)$, 并选取 $x_n=\dfrac{a}{n^2}$, 则对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有 $u_n(x)=\dfrac{a_n(x)}{b_n(x)}$, 且

$$\frac{na_n(x_n)}{b_{2n}(x_n)}\geqslant\frac{n^2x_n}{(1+2nx_n)^{2n}}=\frac{a}{\left(1+\dfrac{2na}{n^2}\right)^{2n}}=\frac{a}{\left(1+\dfrac{2a}{n}\right)^{2n}},$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n(x_n)}{b_{2n}(x_n)}\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\left(1+\dfrac{2a}{n}\right)^{2n}}=a\mathrm{e}^{-\frac{4}{a}}>0.$$

由命题 4.1.2 可知，原函数项级数在 $[0,a]$ 上不一致收敛.

另一方面，当 $x \geqslant a$ 时，对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 2$, 有

$$u_n(x) = \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} < \frac{nx}{(1+x)^n}$$
$$= \frac{nx}{\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k} < \frac{nx}{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)x^3} < \frac{6}{a^2}\cdot\frac{1}{(n-1)(n-2)},$$

于是由 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n-2)}$ 收敛及 Weierstrass 判别法可知，原级数在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛.

例 4.1.4 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

证明 令 $u_n(x) = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$, $a_n(x) = \frac{n}{\sqrt{n(n+x)}}$ $(\forall\, n \in \mathbb{Z}^+)$, 则

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\cdot\frac{n}{\sqrt{n(n+x)}} = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\cdot a_n(x).$$

因为对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{(n+1)\sqrt{n(n+x)}}{n\sqrt{(n+1)(n+1+x)}} = \sqrt{\frac{n(n+1)+(n+1)x}{n(n+1)+nx}} > 1,$$

所以函数列 $\{a_n(x)\}$ 对每一个 $x \geqslant 0$ 关于 n 是单调增加的，并且

$$|a_n(x)| = \frac{n}{\sqrt{n(n+x)}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1 \quad (0 \leqslant x < +\infty,\ n \in \mathbb{Z}^+).$$

下面证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上收敛.

事实上, 对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 存在 $k \in \mathbb{Z}^+$, 使得 $k^2 \leqslant n \leqslant (k+1)^2-1$, 且 $[\sqrt{n}] = k$, 于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 的项加括号 (在同一个括号内各项的符号相同，其项数为 $2k+1$) 后所成的级数为

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right].$$

记 $b_k = \frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}$ $(k \in \mathbb{Z}^+)$, 则对 $\forall\, k \in \mathbb{Z}^+$, 由

$$b_k = \underbrace{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{k^2+k-1}}_{k\ 项}+\underbrace{\frac{1}{k^2+k}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}}_{k+1\ 项}$$

可推得

$$\frac{2}{k+1} = \frac{k}{k^2+k}+\frac{k+1}{(k+1)^2} < b_k < \frac{k}{k^2}+\frac{k+1}{k^2+k} = \frac{2}{k},$$

于是对 $\forall\, k \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$b_{k+1} < \frac{2}{k+1} < b_k.$$

由此可知, $\{b_k\}$ 单调减少趋于零, 并根据 Leibniz[①] 判别法可知, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ 收敛.

如上所述, 对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 存在 k, 使得

$$k^2 \leqslant n \leqslant (k+1)^2 - 1,$$

并且当 k 为奇数且 $k > 1$ 时, 有

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^j b_j \leqslant \sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{[\sqrt{j}]}}{j} \leqslant \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j b_j,$$

当 k 为偶数时, 有

$$\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j b_j \leqslant \sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{[\sqrt{j}]}}{j} \leqslant \sum_{j=1}^{k}(-1)^j b_j,$$

于是由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ 收敛可知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛且与 x 无关, 即关于 x 是一致收敛的.

综上可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\cdot a_n(x)$ 满足 Abel 判别法的条件, 于是原函数项级数在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

关于函数项级数一致收敛性的判别, 由于在第 2 章第 2 节和第 3 章第 5 节中已经结合 Abel 方法和估值问题举过一些例子, 因此这里不再多举了.

4.1.2 含参变量积分的一致收敛性

以下主要讨论含参变量的无穷积分, 因为无界函数的瑕积分经过适当的变换, 可以化为无穷积分.

对于二元函数 $f(x,t)$, 我们经常假定它关于 x 是可积的, x 在 $[a,+\infty)$ 上变化, 而 t 在有穷或无限区间 I 上变化. 在无穷积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$$

中, x 是积分变量, 它相当于函数项级数中的求和变量 n, 而 t 在这里称为参变量, 它相当于函数项级数中的 x.

下面列出含参变量积分一致收敛的定义和几个判别法, 它们与函数项级数的情形是平行的.

---

① Leibniz, 莱布尼茨, 1646—1716, 德国.

定义 4.1.3 设 $f(x,t)$ 是定义在 $[a,+\infty)\times I$ 上的二元函数. 如果对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $A_1>0$ $(A_1\geqslant a)$, 使得当 $A>A_1$ 时, 对 $\forall\,t\in I$, 有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,$$

则称积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 在区间 I 上一致收敛.

定理 4.1.6 (Cauchy 收敛原理)

积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 在区间 I 上一致收敛的充分必要条件是: 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $A_1>a$, 当 $A''>A'>A_1$ 时, 对 $\forall\,t\in I$, 有 $\displaystyle\left|\int_{A'}^{A''} f(x,t)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$.

定理 4.1.7 积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 在区间 I 上一致收敛的充分必要条件是

$$\lim_{A\to+\infty}\sup_{t\in I}\left|\int_A^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x\right|=0.$$

定理 4.1.8 (Weierstrass 判别法)

设 $f(x,t)$ 是定义在 $[a,+\infty)\times I$ 上的二元函数. 如果存在一个定义在 $[a,+\infty)$ 上的函数 $F(x)$, 使得对 $\forall\,(x,t)\in[a,+\infty)\times I$, 有

$$|f(x,t)|\leqslant F(x),$$

并且积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 在 I 上一致收敛.

定理 4.1.9 (Abel 判别法)

设 $a(x,t)$, $b(x,t)$ 是定义在 $[a,+\infty)\times I$ 上的二元函数. 如果积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} b(x,t)\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛, 而 $a(x,t)$ 对于每一个 $t\in I$ 关于 x 是单调的, 并且一致有界, 即存在 $M>0$, 使得对 $\forall\,(x,t)\in[a,+\infty)\times I$, 有

$$|a(x,t)|\leqslant M,$$

则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} a(x,t)b(x,t)\mathrm{d}x$ 在 I 上一致收敛.

定理 4.1.10 (Dirichlet 判别法)

设 $a(x,t)$, $b(x,t)$ 是定义在 $[a,+\infty)\times I$ 上的二元函数. 如果积分 $\displaystyle\int_a^{A} b(x,t)\mathrm{d}x$ 关于 A 及 t 一致有界, 即存在 $M>0$, 使得对 $\forall\,(A,t)\in[a,+\infty)\times I$, 有

$$\left|\int_a^{A} b(x,t)\mathrm{d}x\right|\leqslant M,$$

而 $a(x,t)$ 对每一个 $t\in I$ 关于 x 是单调的, 并且当 $x\to+\infty$ 时, $a(x,t)$ 关于 $t\in I$

一致趋于零，则积分 $\int_a^{+\infty} a(x,t)b(x,t)\mathrm{d}x$ 在 I 上一致收敛.

命题 4.1.3 若函数 $f(x,t)$ 满足下列条件之一，则积分 $\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 在 I 上不一致收敛.

(1) 存在函数 $t=t(x)\in I\ (a\leqslant x<+\infty)$, 使得积分 $\int_a^{+\infty} f(x,t(x))\mathrm{d}x$ 发散;

(2) $f(x,t)>0\ (a\leqslant x<+\infty,\ t\in I)$, 且存在函数 $t=t(x)\in I\ (a\leqslant x<+\infty)$, 使得

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\lambda}f(x,t(x))>0\quad(\lambda\leqslant 1);$$

(3) $f(x,t)=\dfrac{a(x,t)}{b(x,t)}\ (a\leqslant x<+\infty,\ t\in I)$, 对每个 $t\in I$, $a(x,t)$ 与 $b(x,t)$ 均为关于 x 的单调增加的正值函数，且存在函数 $t=t(x)\in I\ (a\leqslant x<+\infty)$, 使得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xa(x,t(x))}{b(2x,t(x))}>0.$$

证明 这里仅对第 3 种情形给出证明，其余两种情形可仿照命题 4.1.2 的证明思路由读者自己给出.

事实上，对 $\forall\, A\in(a,+\infty)$, 我们考虑积分

$$\int_A^{2A} f(x,t)\mathrm{d}x=\int_A^{2A}\frac{a(x,t)}{b(x,t)}\,\mathrm{d}x.$$

由于 $a(x,t)$ 与 $b(x,t)$ 均为关于 x 的单调增加的正值函数，因而对 $\forall\, t\in I$, 有

$$\int_A^{2A}\frac{a(x,t)}{b(x,t)}\,\mathrm{d}x\geqslant\int_A^{2A}\frac{a(A,t)}{b(2A,t)}\,\mathrm{d}x=\frac{Aa(A,t)}{b(2A,t)}.$$

又由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xa(x,t(x))}{b(2x,t(x))}=q>0$ 可知，当 x 充分大时，有

$$\frac{xa(x,t(x))}{b(2x,t(x))}>\frac{q}{2},$$

于是当 A 充分大时，有

$$\int_A^{2A}\frac{a(x,t)}{b(x,t)}\,\mathrm{d}x>\frac{q}{2},$$

故根据 Cauchy 收敛原理可知，积分 $\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 在 I 上不一致收敛. ∎

例 4.1.5 设 $t_0>0$, 讨论积分 $\int_0^{+\infty}\sqrt{t}\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x$ 在区间 $(0,t_0)$ 和区间 $(t_0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

解 由于 $\int_0^1 \sqrt{t}\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x$ 是常义积分，故只需讨论

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{t}\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x$$

分别在区间 $(0,t_0)$ 和区间 $(t_0,+\infty)$ 上关于 t 的一致收敛性.

(1) 考虑区间 $(0,t_0)$.

选取函数 $t(x)=\dfrac{1}{x^2}$, 当 x 充分大时，有 $t(x)\in(0,t_0)$. 又因

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}\cdot x^2}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

发散，故由命题 4.1.3 可知，积分 $\int_1^{+\infty} \sqrt{t}\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x$ 在 $(0,t_0)$ 上不一致收敛.

(2) 考虑区间 $(t_0,+\infty)$.

对 $\forall\, t\in(t_0,+\infty)$, 由不等式 $\mathrm{e}^{\mu}>1+\mu\ (\mu>0)$ 可得

$$\sqrt{t}\mathrm{e}^{-tx^2}\leqslant\frac{\sqrt{t}}{1+tx^2}<\frac{1}{\sqrt{t}x^2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{t_0}\,x^2}.$$

又因积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{t_0}\,x^2}$ 收敛，根据 Weierstrass 判别法可知，积分 $\int_1^{+\infty} \sqrt{t}\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x$ 在 $(t_0,+\infty)$ 上一致收敛.

例 4.1.6 讨论积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2(1+x^2)}\sin t\mathrm{d}x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上关于 t 的一致收敛性.

解 仔细观察被积函数 $f(x,t)=\mathrm{e}^{-t^2(1+x^2)}\sin t$ 可以看出，当 $|t|$ 取值充分大时，第一个因子的积分将取决于 e^{-x^2}, 而 $\sin t$ 是有界的，所以可考虑用控制判别法. 另一方面, 当 $|t|$ 取值充分小时, $t^2(1+x^2)$ 有可能保持一个常量, 而 $\int_0^{+\infty}\sin t\mathrm{d}x$ 能否收敛，那要看 t 的具体取值与 x 有着怎样的关系.

(1) 设 $|t|\geqslant t_0\ (t_0>0)$, 则由 $\mathrm{e}^{t^2(1+x^2)}\geqslant \mathrm{e}^{t_0^2}\mathrm{e}^{t_0^2x^2}\geqslant \mathrm{e}^{t_0^2x^2}$ 可得

$$|\mathrm{e}^{-t^2(1+x^2)}\sin t|\leqslant \mathrm{e}^{-t^2(1+x^2)}\leqslant \mathrm{e}^{-t_0^2x^2}\quad(0\leqslant x<+\infty,\ |t|\geqslant t_0),$$

于是由 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t_0^2x^2}\mathrm{d}x$ 收敛可知，原积分在 $(-\infty,-t_0]$ 及 $[t_0,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) 设 $|t|<t_0\ (t_0>0)$, 即 $t\in(-t_0,t_0)$, 先考虑 $[0,t_0)$ 的情形.

取 $t(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, 显然当 x 充分大时， $t(x)\in[0,t_0)$, 此时

$$f(x,t(x))=\mathrm{e}^{-t(x)^2(1+x^2)}\sin t(x)=\mathrm{e}^{-1}\sin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

而由

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=1$$

可知，当 x 充分大时，

$$\sin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>\frac{1}{2x}.$$

又因为 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}\,dx$ 发散及 $\int_0^1\sin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ 为常义积分，故 $\int_0^{+\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ 发散，从而根据命题 4.1.3 可知，原积分在 $[0,t_0)$ 上不一致收敛. 同理可证其在 $(-t_0,0]$ 上不一致收敛，从而在 $(-t_0,t_0)$ 上不一致收敛.

注 本题中 $|t|<t_0$ 的情形亦可利用命题 4.1.3 中的 (3) 加以证明.

事实上，记 $a(x,t)=\sin t$，$b(x,t)=e^{t^2(1+x^2)}$，则当 $t\in[0,t_0)$ 时，$a(x,t)$ 与 $b(x,t)$ 均为关于 x 的单调增加函数，且当 t 充分小时，$a(x,t)\geqslant 0$，$b(x,t)>0$.

取 $t(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xa(x,t(x))}{b(2x,t(x))}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{e^{\frac{1+4x^2}{1+x^2}}}=\frac{1}{e^4},$$

故原积分在 $[0,t_0)$ 上不一致收敛. 同理可证它在 $(-t_0,0]$ 上不一致收敛.

习题 4.1

4.1.1 研究下列级数在给定区间上的一致收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$，在 $(0,1)$ 和 $(0,a)$ 上，其中 $a<1$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$，在 $[0,1]$ 上;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{(x+n)(x+n+1)}$，在 $(0,+\infty)$ 上;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{[1+(n-1)x](1+nx)}$，在 $(0,+\infty)$ 上;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$，在 $[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$ 和 $[0,2\pi]$ 上，其中 $0<\varepsilon<2\pi$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}xe^{-nx}$，在 $(0,a)$ 和 $(a,+\infty)$ 上，其中 $a>0$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{1}{3^nx}$，在 $(0,+\infty)$ 上;　　(8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{x}{n\ln^2 n}\right)$，在 $(-1,1)$ 上.

4.1.2 确定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln^n x}{n}$ 的收敛区间和一致收敛区间.

4.1.3 讨论级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的一致收敛性.

4.1.4 设 $f(x)\in C^1(a,b)$, 求证：对任意的闭区间 $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$, 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛于 $f'(x)$, 其中

$$f_n(x)=n\Big[f\Big(x+\frac{1}{n}\Big)-f(x)\Big]\quad(a<x<b,\ n\in\mathbb{Z}^+).$$

4.1.5 设 $f(x)\in C[a,b]$, 且

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\Big(x+\frac{k}{n}\Big)\ (n\in\mathbb{Z}^+),$$

求证函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

4.1.6 讨论下列含参变量的积分在给定区间上的一致收敛性：

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$, 关于 α 在 $[0,a]$ 和 $[a,+\infty)$ 上，其中 $a>0$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x$, 关于 α 在 $[0,+\infty)$ 上;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\sin x\mathrm{d}x$, 关于 t 在 $(-\infty,+\infty)$ 上;

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$, 关于 p 在 $[0,+\infty)$ 上.

4.1.7 证明积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+x^2t^2}\mathrm{d}x$ 在含有 $t=0$ 点的任何邻域内不一致收敛,而在 $(-\infty,-\varepsilon)$ 和 $(\varepsilon,+\infty)$ 上都是一致收敛的，其中 $\varepsilon>0$.

4.1.8 研究下列级数的一致收敛性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^2n^2}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-x^2}$.

4.1.9 研究下列积分关于 y 的一致收敛性.

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}x$, 在 $(-\infty,0)$;　　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 在 $(0,+\infty)$ 上.

4.2　运算次序的交换性

一般来说，两种运算的次序是不能随意交换的，需要一定的条件才行. 但是，正如本章开头所说，如果两种运算可以交换顺序，确实能给我们提供许多方便，比如，不少级数的求和问题及难以计算的积分等都是借助交换运算次序完成的. 在本节中，我们将在阐述几个关于运算次序交换性定理的基础上，着重通过一些例子引导读者去掌握利用交换次序来解决有关问题的方法.

本节主要讨论求和、求导、求积分和求极限这四种运算的“换序”问题. 我们将以求和与求积分为主线，也就是说，分别讨论求和与其他运算次序的交换以及求积分与其他运算次序的交换.

4.2.1 求和与其他运算的可换性

定理 4.2.1 (求和与求和的可交换性)

设 $a_{n,k} > 0$ (n, $k = 1, 2, \cdots$), 则二重级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n,k}$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n,k}$ 中有一个收敛时, 另一个也收敛, 并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}.$$

定理 4.2.2 (求和与求和的可交换性)

如果二重级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n,k}$ 绝对收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n,k}$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n,k}$ 均收敛, 并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}.$$

定理 4.2.3 (极限与求和的可交换性)

设 $x_0 \in I$, $\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x) = c_n$ ($n = 1, 2, \cdots$), 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 且

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

定理 4.2.4 (积分与求和的可交换性)

设 $u_n(x) \in C[a,b]$ ($n = 1, 2, \cdots$), 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则

$$\int_a^b \Big[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big]\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

定理 4.2.5 (求导与求和的可交换性)

设 $u_n(x) \in C^1[a,b]$ ($n = 1, 2, \cdots$), 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上处处收敛, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

注 1 在定理 4.2.4 及定理 4.2.5 中, 条件“$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛”及条件“$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛”都是充分性条件, 并非是必要的.

注 2 如果在开区间 (a,b) (包括无限区间的情形) 上考虑, 则定理 4.2.4 及定理 4.2.5 中的条件“一致收敛”均可改为在 (a,b) 上内闭一致收敛, 即在 (a,b) 内的任意一个闭区间上一致收敛.

例 4.2.1 求二重级数 $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ 的和.

解 因为对 $\forall\, n,\ k\in\mathbb{Z}^+$, 有 $\frac{1}{n^k}>0$, 且当 $n>2,\ k>2$ 时, 有

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{k}\frac{1}{i^j}=\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{k}\left(\frac{1}{i}\right)^j=\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i^2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{i}\right)^{k-1}}{1-\frac{1}{i}}$$
$$<\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i(i-1)}=1-\frac{1}{n}<1,$$

所以正项二重级数的部分和有上界, 于是二重级数收敛, 且由定理 4.2.2 可得

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^k}=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{n^k}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n^k}$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=1.$$

例 4.2.2 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ 的和.

解 方法一: 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$, 则由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 的收敛半径为 1 可知, 所求级数的和为 $f\left(\frac{1}{3}\right)$, 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 在 $(-1,1)$ 上是内闭一致收敛的, 于是对 $\forall\, x\in(0,1)$, 有

$$\int_0^x\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}n^2t^{n-1}\right]\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n.$$

记 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$, 则对 $\forall\, x\in(0,1)$, 有

$$\int_0^x\frac{s(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}n\int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x},$$

于是对 $\forall\, x\in(0,1)$, 有

$$\frac{s(x)}{x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2},$$
$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\mathrm{d}s(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]=\frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

综上可知, 对 $\forall\, x\in(0,1)$, 有 $f(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}.$$

方法二：设 $f(x)=\dfrac{1}{\ln^2 3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^{nx}}$, 则由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^{nx}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上处处收敛可得

$$f(x)=\frac{1}{\ln^2 3}\left(\frac{1}{1-3^{-x}}-1\right)=\frac{1}{\ln^2 3}\cdot\frac{1}{3^x-1},$$

于是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^{nx}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛可知， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，且

$$-\frac{1}{\ln 3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{nx}}=f'(x)=\left[\frac{1}{\ln^2 3}\cdot\frac{1}{3^x-1}\right]'=-\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{3^x}{(3^x-1)^2}.$$

又由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^{nx}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛可知， $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^{nx}}=f''(x)=\left[-\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{3^x}{(3^x-1)^2}\right]'=\frac{3^x(3^x+1)}{(3^x-1)^3},$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}=f''(1)=\left.\frac{3^x(3^x+1)}{(3^x-1)^3}\right|_{x=1}=\frac{3}{2}.$$

注 在例 4.2.2 中，求解方法一实质上是 Abel 级数求和法 (参见第 2 章第 4 节).

例 4.2.3 求证 $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-n}$.

证明 根据 e^x 的 Taylor 展开式可得

$$x^{-x}=\mathrm{e}^{-x\ln x}=1-x\ln x+\frac{(x\ln x)^2}{2!}+\cdots+(-1)^k\frac{(x\ln x)^k}{k!}+\cdots.$$

应用极值原理可知，当 $x\in[0,1]$ 时，有

$$|x\ln x|\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}},$$

从而上述级数在 $[0,1]$ 上一致收敛，且

$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(-x\ln x)^k}{k!}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 x^k\ln^k x\mathrm{d}x.$$

记 $J_{k,m}=\displaystyle\int_0^1 x^k\ln^m x\mathrm{d}x$, 则由分部积分公式可知，对 $\forall\, k,\ m\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$J_{k,m}=-\frac{m}{k+1}J_{k,m-1}=\cdots=(-1)^m\frac{m!}{(k+1)^m}J_{k,0}=(-1)^m\frac{m!}{(k+1)^{m+1}},$$

于是

$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 x^k\ln^k x\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^{k+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-n}.$$

例 4.2.4 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^x}$.

分析 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^x}$ 的和函数很难求出，而求极限的运算又不能在求和里面进行 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \text{ 发散}\right)$, 因此需要对级数加以变形. 这可借助 Abel 变换公式

$$\sum_{n=1}^{m}a_n\Delta B_{n-1}=a_mB_m-\sum_{n=1}^{m-1}B_n\Delta a_n$$

来实现.

解 令 $a_n(x)=\dfrac{1}{n^x}$, $B_0=0$, $\Delta B_{n-1}=B_n-B_{n-1}=(-1)^n$, 则

$$\Delta a_n=\frac{1}{(n+1)^x}-\frac{1}{n^x},$$

且

$$B_n=\sum_{k=1}^{n}(B_k-B_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k=\frac{(-1)^n-1}{2}.$$

于是对 $\forall\, m\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^n}{n^x}&=\sum_{n=1}^{m}a_n(x)\Delta B_{n-1}\\&=a_m(x)B_m-\sum_{n=1}^{m-1}B_n\Delta a_n(x)\\&=\frac{1}{m^x}\frac{(-1)^m-1}{2}+\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(-1)^n-1}{2}\left[\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right].\end{aligned}$$

由于对 $\forall\, x\in(0,+\infty)$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^x}$ 都收敛，所以令 $m\to\infty$, 由上面的等式可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{2}\left[\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right]\\&=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right]+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right]\\&=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right].\end{aligned}$$

下面证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\dfrac{1}{n^x}-\dfrac{1}{(n+1)^x}\right]$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

令 $b_n(x)=\dfrac{1}{n^x}-\dfrac{1}{(n+1)^x}$ $(n\in\mathbb{Z}^+)$, 则由

$$b_n(x)=\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}=\frac{1}{n^x}\left[1-\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^x}\right]$$

可知，对每一个 $x\in[0,+\infty)$,$\{b_n(x)\}$ 关于 n 单调减少，并且当 $x\in[0,1]$ 时，有

$$|b_n(x)|\leqslant 1-\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^x}\leqslant 1-\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}=\frac{1}{n+1},$$

当 $x>1$ 时，有

$$|b_n(x)|\leqslant\frac{1}{n^x}<\frac{1}{n},$$

于是函数列 $\{b_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛于零.

综上可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\dfrac{1}{n^x}-\dfrac{1}{(n+1)^x}\right]$ 在 $[0,+\infty)$ 上满足 Dirichlet 判别法的条件，故由 Dirichlet 判别法可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\dfrac{1}{n^x}-\dfrac{1}{(n+1)^x}\right]$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛，从而由定理 4.2.3 可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}&=\lim_{x\to0^+}\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right]\right\}\\&=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{n^x}-\frac{1}{(n+1)^x}\right]=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 4.2.5 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和.

解 设 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, 则由级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭一致收敛可知，极限与求和、求导与求和运算可以交换，即

$$s(0)=1,\quad s'(x)=\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

再由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭一致收敛可得

$$s'(0)=0,\quad s''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=s(x),$$

于是和函数 $s(x)$ 应满足二阶常微分方程的初值问题

$$\begin{cases}s''(x)-s(x)=0\\ s(0)=1,\ s'(0)=0.\end{cases}$$

由于二阶方程 $s''(x)-s(x)=0$ 的特征根为 $\lambda=\pm1$, 故该方程的通解为

$$s(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x},$$

于是由初始条件 $s(0)=1,\ s'(0)=0$ 可得

$$s(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})=\cosh x.$$

4.2.2　积分与其他运算次序的可换性

下面几个交换运算次序的定理，都是对无穷积分来说的，关于有穷积分与各种运算交换次序的条件，只要在定理 4.2.6, 定理 4.2.7 及定理 4.2.9 中去掉无穷积分一致收敛这一条件即可.

定理 4.2.6 (极限与积分的可交换性)

设 $f(x,t)$ 是定义在 $[a,+\infty)\times T$ (其中 T 为任意实数集) 上的二元函数， $\varphi(x)$ 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的函数，且满足：

(1) 对每一个 $t\in T, f(x,t)$ 关于 x 在 $[a,+\infty)$ 上连续,

(2) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 在 T 上一致收敛,

(3) 存在 T 的聚点 t_0, 使得对 $\forall\, b>a$, $\lim\limits_{t\to t_0} f(x,t)=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于 x 一致成立，即对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $t\in T$, $|t-t_0|<\delta$ 时，对 $\forall\, x\in[a,b]$, 有

$$|f(x,t)-\varphi(x)|<\varepsilon,$$

则积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且

$$\lim_{t\to t_0}\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\lim_{t\to t_0} f(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

定理 4.2.7 (积分与积分的可交换性)

设二元函数 $f(x,t)$ 在区域 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续，且积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 关于 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，则

$$\int_\alpha^\beta\left[\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t=\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^\beta f(x,t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x.$$

定理 4.2.8 (积分与积分的可交换性)

设二元函数 $f(x,t)$ 在区域 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$ 上连续，且满足：

(1) 对 $\forall\,\beta>\alpha$, 积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 关于 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛,

(2) 对 $\forall\, b>a$, 积分 $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$ 关于 x 在 $[a,b]$ 上一致收敛,

(3) $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty}|f(x,t)|\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t$ 与 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^{+\infty}|f(x,t)|\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$ 至少有一个存在,

则积分 $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t$ 与 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$ 都存在，且

$$\int_\alpha^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t=\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x.$$

定理 4.2.9 (求导与积分的可交换性)

设二元函数 $f(x,t)$ 及偏导数 $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ 都在区域 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续，并且积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上处处收敛，而积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，则对 $\forall\, t\in[\alpha,\beta]$, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}x.$$

下面我们应用这些定理计算几个积分.

例 4.2.6 设 $a>0,\ b>0$, 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x$.

解 对每一个 $x\in[0,+\infty)$, 有

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}, & x\neq 0,\\ b-a, & x=0,\end{cases}$$

故所求积分可写为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\int_a^b \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x,$$

于是由积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛可知，上面的积分可以交换顺序，即

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln\frac{b}{a}.$$

例 4.2.7 计算 Poisson① 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解 因为对 $\forall\, x\in[0,+\infty)$, 有 $\mathrm{e}^{-x^2}=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$, 所以

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}x. \tag{$*$}$$

为使上式右端的极限与积分两种运算能交换次序，我们先验证一下可交换条件:

(1) 对每一个固定的 $n\in\mathbb{Z}^+$, 显然 $\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续;

(2) 对 $\forall\, b>0$, 函数 $\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}$ 在 $[0,b]$ 上关于 n 为单调减少的，并由极限函数 e^{-x^2} 连续及例 1.7.3 可知，函数列 $\left\{\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}\right\}$ 在 $[0,b]$ 上一致收敛于 e^{-x^2};

① Poisson, 泊松， 1781—1840, 法国.

(3) 因为对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$0 < \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \frac{1}{1+x^2},$$

所以积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}x$ 关于 n 是一致收敛的.

由以上条件及定理 4.2.6 可知, $(*)$ 式中的极限与积分可以交换次序, 即

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}x,$$

于是令 $\dfrac{x}{\sqrt{n}} = t$, 并代入上式右端积分可得

$$\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}x = \sqrt{n}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}.$$

记 $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$, 则对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 由分部积分可得

$$I_{n-1} = 2(n-1)I_{n-1} - 2(n-1)I_n,$$

于是由 $I_n = \dfrac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}\ (n=1,2,\cdots)$ 可推得

$$I_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

根据 Wallis[①] 公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[(2n-2)!!]^2}{(2n-1)[(2n-3)!!]^2} = \frac{\pi}{2}$$

就得到

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n-1}}\cdot\frac{\sqrt{2n-1}(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.\end{aligned}$$

例 4.2.8 计算积分 $I(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2xy\,\mathrm{d}x\ (-\infty < y < +\infty)$.

解 设 $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2}\cos 2xy$, 则 $f(x,y)$ 及 $f'_y(x,y)$ 都在 $[0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$ 上连续, 并且由

$$|f(x,y)| = |\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2xy| \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$$

① Wallis, 沃利斯, 1616—1703, 英国.

及

$$|f_y'(x,y)| = \left|\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2xy)\right| = |2x\mathrm{e}^{-x^2}\sin 2xy| \leqslant 2x\mathrm{e}^{-x^2}$$

可知，积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\cos 2xy\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{+\infty} 2x\mathrm{e}^{-x^2}\sin 2xy\mathrm{d}x$ 都在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，于是所求积分与求导可交换次序，并且由分部积分可得

$$I'(y) = -2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\sin 2xy\mathrm{d}x = -2y\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\cos 2xy\mathrm{d}x = -2yI(y).$$

解此微分方程得

$$I(y) = C\mathrm{e}^{-y^2},$$

从而由 $I(0) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 可得

$$I(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-y^2} \quad (-\infty < y < +\infty).$$

例 4.2.9 求 Dirichlet 积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

解 考察含参变量积分

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \quad (t \geqslant 0).$$

由 Abel 判别法知，该积分在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. 记

$$f(x,t) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \mathrm{e}^{-tx}\dfrac{\sin x}{x}, & 0 < x < +\infty, \end{cases}$$

则 $f(x,t)$ 及 $f_t'(x,t) = -\mathrm{e}^{-tx}\sin x$ 在 $(0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续，且 $\int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛，于是 $I(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且

$$\lim_{t\to 0^+} I(t) = I(0) = I.$$

又因为对 $\forall\,\eta > 0$, 由

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\sin x\mathrm{d}x$$

及 Weierstrass 判别法可知，积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}x$ 关于 t 在 $[\eta,+\infty)$ 上一致收敛，所以积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，于是由定理 4.2.9 可知，

对 $\forall\, t \in (0, +\infty)$, 有

$$I'(t) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \sin x \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-tx}(t \sin x + \cos x)}{1+t^2}\Big|_{x=0}^{+\infty} = -\frac{1}{1+t^2}.$$

由上式解得

$$I(t) = -\arctan t + C.$$

另一方面，对 $\forall\, t \in (0, +\infty)$, 有

$$|I(t)| \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \mathrm{d}x = \frac{1}{t},$$

所以

$$0 = \lim_{t\to+\infty} I(t) = \lim_{t\to+\infty} (-\arctan t + C) = -\frac{\pi}{2} + C,$$

即 $C = \dfrac{\pi}{2}$, 从而

$$I = I(0) = \lim_{t\to 0} \left(-\arctan t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

注 若作变换 $\beta x = \mu$ 或 $\beta x = -\mu$, 可以得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \beta > 0, \\ 0, & \beta = 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \beta < 0, \end{cases}$$

即

$$\operatorname{sgn} \beta = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} \mathrm{d}x.$$

例 4.2.10 设 $a > 0$, 求 $I(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x(a^2+x^2)} \mathrm{d}x \quad (0 < y < +\infty)$.

解 设 $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{x(a^2+x^2)}$, 则 $f(x,y)$ 在 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上连续，且

$$f'_y(x,y) = \frac{\cos xy}{a^2+x^2}, \quad f''_{yy}(x,y) = -\frac{x \sin xy}{a^2+x^2}.$$

由 Abel 判别法可知，对 $\forall\, y > 0$, 积分 $I(y)$ 是收敛的，而由 Weierstrass 判别法可知，$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2+x^2} \mathrm{d}x$ 关于 y 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛，于是对 $\forall\, y \in (0, +\infty)$, 有

$$I'(y) = \int_0^{+\infty} f'_y(x,y) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2+x^2} \mathrm{d}x.$$

又由 Dirichlet 判别法可知，对 $\forall\, \eta > 0$, 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \sin xy}{a^2+x^2} \mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[\eta, +\infty)$ 上

一致收敛，故它在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，于是对 $\forall\, y\in(0,+\infty)$, 有

$$I''(y)=\int_0^{+\infty}f''_{yy}(x,y)\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin xy}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

由此可得二阶微分方程

$$I''(y)-a^2I(y)=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2},$$

解此方程可得

$$I(y)=\frac{\pi}{2a^2}(1-\mathrm{e}^{-ay}).$$

注 由例 4.2.10 可得

$$I'(y)=\frac{\pi}{2a}\,\mathrm{e}^{-ay}=\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{x^2+a^2}\mathrm{d}x,$$

$$I''(y)=-\frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-ay}=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin xy}{a^2+x^2}\mathrm{d}x.$$

例 4.2.11 设 $a>0,\ b>0$, 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(a^2+x^2)}{b^2+x^2}\,\mathrm{d}x.$

解 将式中的 a 视为参变量，并记

$$I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t^2+x^2)}{b^2+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

则由积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2t\mathrm{d}x}{(t^2+x^2)(b^2+x^2)}$ 关于 t 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛可得

$$\begin{aligned}I'(t)&=\int_0^{+\infty}\frac{2t\mathrm{d}x}{(t^2+x^2)(b^2+x^2)}\\&=\frac{2t}{t^2-b^2}\int_0^{+\infty}\Big(\frac{1}{b^2+x^2}-\frac{1}{t^2+x^2}\Big)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{b(t+b)},\\I(0)&=\int_0^{+\infty}\frac{2\ln x}{b^2+x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{b}\int_0^{+\infty}\frac{\ln b+\ln y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\frac{2}{b}\int_0^{+\infty}\frac{\ln b}{1+y^2}\mathrm{d}y=\frac{\pi\ln b}{b},\end{aligned}$$

其中利用了

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\ln y}{1+y^2}\mathrm{d}y&=\int_0^1\frac{\ln y}{1+y^2}\mathrm{d}y+\int_1^{+\infty}\frac{\ln y}{1+y^2}\mathrm{d}y\\&=-\int_1^{+\infty}\frac{\ln\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u^2}}\Big(-\frac{1}{u^2}\Big)\mathrm{d}u+\int_1^{+\infty}\frac{\ln y}{1+y^2}\mathrm{d}y=0.\end{aligned}$$

综上可得

$$I(a)=I(0)+\int_0^a I'(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi\ln b}{b}+\int_0^a\frac{\pi}{b(t+b)}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{b}\ln(a+b).$$

例 4.2.12 设 $a>0$, 计算积分 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x$.

解 作变换 $\tan x=t$, 则

$$I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(at)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t,\quad I(0)=0.$$

令 $f(t,a)=\dfrac{\arctan(at)}{t(1+t^2)}$, 则 $f(t,a)$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续，且

$$f_a'(t,a)=\frac{1}{(1+t^2)(1+a^2t^2)},$$

于是 $f_a'(t,a)$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续，且由 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}$ 关于 a 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛可知，当 $a\neq 1$ 时，有

$$\begin{aligned}I'(a)&=\int_0^{+\infty}f_a'(t,a)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{a^2}{1+a^2t^2}\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2(1+a)},\end{aligned}$$

当 $a=1$ 时，由例 4.2.7 中的结论可得

$$I'(1)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}.$$

综上可知，对 $\forall\, a\in(0,+\infty)$, 有

$$I'(a)=\frac{\pi}{2(1+a)},$$

从而

$$I(a)=I(0)+\frac{\pi}{2}\int_0^a\frac{\mathrm{d}a}{1+a}=\frac{\pi}{2}\ln(1+a).$$

注 在例 4.2.12 中，若令 $a=1$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln 2,$$

于是由

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\ln(\sin x)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$$

可得到著名的 Euler 积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

习题 4.2

4.2.1 设 $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{(k-1)!}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$, 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n(n+1)}$.

4.2.2 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)x^n$ $(0 < x < 1)$.

4.2.3 在极限式

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}\mathrm{d}x$$

中，极限与积分运算可否交换次序？为什么？

4.2.4 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{x^n}{1+x^n}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1})$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$.

4.2.5 对下列级数进行微分时，能否进行逐项求导？

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x}{n^2}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x^{2n+1}} - \frac{1}{x^{2n-1}}\right)$.

4.2.6 求下列级数和：

(1) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$;

(2) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$;

(3) $1\cdot 2x + 2\cdot 3x^2 + 3\cdot 4x^3 + \cdots$.

4.2.7 设 $\{x_n\}$ 是由互不相同的数组成的数列，且 $0 < x_n < 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 讨论

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x - x_n)}{2^n}$$

在 $(0,1)$ 上的连续性.

4.2.8 求 $\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\mathrm{e}^{-nx^2}$.

4.2.9 讨论积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 xy}{x^2}\mathrm{d}x$ 的一致收敛性，并求出值.

4.2.10 设 $a > 0$, $b > 0$, 计算下列积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax - \cos bx}{x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(ax) - \arctan(bx)}{x}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x}\mathrm{d}x$;　　(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx})^2}{x}\mathrm{d}x$.

4.2.11 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}-\mathrm{e}^{-\beta x}}{x}\sin mx\mathrm{d}x$, 其中 $\alpha >$, $\beta > 0$.

4.2.12 设 $f(x)$ 为连续函数，且对任意 $A > 0$, 积分 $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，求证

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = f(0)\ln\frac{b}{a} \quad (a > 0,\ b > 0).$$

4.2.13 利用习题 4.2.12 及 Dirichlet 积分求下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^3\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x\cos \beta x}{x}\mathrm{d}x$;　　(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x}\mathrm{d}x$.

4.2.14 求下列积分：

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\alpha x)\cdot\arctan(\beta x)}{x^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$. (提示：适当引进参数.)

第 5 章　阶的估计及应用

阶的概念是刻画在同一过程中的一个变量相对其他变量变化速度的. 通过阶的估计, 可以突出变量的主要因素, 避开一些繁杂的计算, 因此, 它在判别无穷级数和无穷积分收敛性以及各种极限的计算中有许多应用. 本章介绍有关阶的概念、阶的估计方法及其应用.

5.1　阶的定义及运算

5.1.1　无穷小量与无穷大量的阶的定义

定义 5.1.1 设 α 与 β 均为无穷小 (大) 量, 并且

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = A.$$

(1) 当 $A = 0$ 时, 称 β 是关于 α 的高 (低) 阶无穷小 (大) 量, 记为 $\beta = o(\alpha)$;

(2) 当 $A \neq 0$ 时, 称 β 是与 α 同阶的无穷小 (大) 量, 记 $\beta = O^*(\alpha)$, 特别地, 当 $A = 1$ 时, 又称 β 是与 α 等价的无穷小 (大) 量, 记为 $\beta \sim \alpha$;

(3) 当 $A = \infty$ 时, 称 β 是关于 α 的低 (高) 阶无穷小 (大) 量.

注 1 在定义 5.1.1 中, 没有指明极限过程, 如果需要的话, 可在记号后边的括号内加以说明. 例如

$$\sin x \sim x \quad (x \to 0);$$

$$\frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}) = O^*(\frac{1}{n^2}) \quad (n \to \infty);$$

$$\ln x = o(x) \quad (x \to +\infty).$$

注 2 当 α 为无穷小量时, 有时也记作 $\alpha = o(1)$, 其含义相当于 $\lim \dfrac{\alpha}{1} = 0$.

注 3 若在某一过程中, $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| \leqslant M$ (M 是常数), 则记为 $\beta = O(\alpha)$, 注意它和同阶无穷小 (大) 量记号的区别. 比如, 当 $x \to 0$ 时, 可以写成 $x \sin \dfrac{1}{x} = O(x)$, 而不能写成 $x \sin \dfrac{1}{x} = O^*(x)$. 特别地, $O(1)$ 就代表有界量, 如 $\sin \dfrac{1}{x} = O(1)$ $(x \to 0)$.

定义 5.1.2 设 α 与 β 均为无穷小量, 如果存在常数 $k > 0$ 及 $c \neq 0$, 使得

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c, \tag{$*$}$$

则称 $c\alpha^k$ 为 β 关于 α 的主部 (简称主部), 记为 $Z_\beta(\alpha)$; 同时称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小量, 而 k 则称为 β 关于 α 的阶, 记为 $O_\beta(\alpha) = k$.

注 1 若 k 不是自然数，为使 (∗) 式有意义，应当要求 $\alpha > 0$.

注 2 对于任意两个无穷小量 α 与 β, 它们之间不一定都有阶的关系，或者说 β 不一定存在关于 α 的主部.

例 5.1.1 当 $x \to 0^+$ 时，$\alpha = x^2$ 和 $\beta = \sin^3 \dfrac{x}{2}$ 都是无穷小量，由于

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\beta}{\alpha^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^3 \dfrac{x}{2}}{x^3} = \frac{1}{8},$$

所以 $O_\beta(\alpha) = \dfrac{3}{2}$, $Z_\beta(\alpha) = \dfrac{1}{8}\alpha^{\frac{3}{2}}$.

例 5.1.2 当 $n \to +\infty$ 时，$\alpha = \dfrac{1}{\ln n}$ 和 $\beta = \dfrac{1}{n}$ 都是无穷小量，由于对任意正数 k, 皆有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta}{\alpha^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^k n}{n} = 0,$$

所以 β 与 α 之间不存在阶的关系，因而也没有 β 关于 α 的主部.

5.1.2 阶的性质和运算

下面仅介绍无穷小量的阶的运算，无穷大量的情形可类似给出. 熟悉和掌握阶的这些性质和运算规则，便于今后利用阶的估计解决有关问题.

命题 5.1.1 设 α 与 β 都是无穷小量, 则 $\beta \sim \alpha$ 的充分必要条件是 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

证明 如果 $\beta \sim \alpha$, 则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$, 故有

$$\lim \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) = 0,$$

从而 $\beta - \alpha = o(\alpha)$, 即 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

反之，如果 $\beta = \alpha + o(\alpha)$, 则 $\lim \dfrac{\beta - \alpha}{\alpha} = 0$, 于是

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \left(\frac{\beta - \alpha}{\alpha} + 1\right) = 1,$$

即 $\beta \sim \alpha$. ▌

命题 5.1.2 设 α 与 β 都是无穷小量，则

(1) $o(\alpha) \pm o(\alpha) = o(\alpha)$;　　(2) $o(\alpha) \cdot O(\beta) = o(\alpha\beta)$;

(3) $O(\alpha) \cdot O(\beta) = O(\alpha\beta)$;　　(4) $o(O(\alpha)) = o(\alpha)$;

(5) $O(o(\alpha)) = o(\alpha)$.

证明 只证 (2) 和 (4), 其余留给读者自行证明.

(2) 令 $\lambda = o(\alpha)$, $\mu = O(\beta)$, 则 $\lim \dfrac{\lambda}{\alpha} = 0$, 且存在常数 $M > 0$, 使得 $\left|\dfrac{\mu}{\beta}\right| \leqslant M$, 于是

$$\lim \frac{\lambda\mu}{\alpha\beta} = \lim \frac{\lambda}{\alpha} \cdot \frac{\mu}{\beta} = 0,$$

即 $o(\alpha)\cdot O(\beta)=o(\alpha\beta)$.

(4) 令 $\lambda=O(\alpha)$, $\mu=o(\lambda)$, 则 $\lim\dfrac{\mu}{\lambda}=0$, 且存在常数 $M>0$, 使得 $\left|\dfrac{\lambda}{\alpha}\right|\leqslant M$, 于是

$$\lim\frac{\mu}{\alpha}=\lim\frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{\alpha}=0,$$

即 $o(O(\alpha))=o(\alpha)$. ▮

命题 5.1.3 设 α, β 及 γ 都是无穷小量，且 $O_\beta(\alpha)$ 与 $O_\gamma(\alpha)$ 均存在，则

(1) $O_{\beta\gamma}(\alpha)=O_\beta(\alpha)+O_\gamma(\alpha)$;

(2) 当 β 与 γ 同号时，有 $O_{\beta+\gamma}(\alpha)=\min\{O_\beta(\alpha),\ O_\gamma(\alpha)\}$.

证明 (1) 令 $O_\beta(\alpha)=k_1>0$, $O_\gamma(\alpha)=k_2>0$, 则存在 $c_1\neq 0$ 及 $c_2\neq 0$, 使得

$$\lim\frac{\beta}{\alpha^{k_1}}=c_1,\quad \lim\frac{\gamma}{\alpha^{k_2}}=c_2,$$

于是

$$\lim\frac{\beta\gamma}{\alpha^{k_1+k_2}}=\lim\frac{\beta}{\alpha^{k_1}}\cdot\lim\frac{\gamma}{\alpha^{k_2}}=c_1c_2\neq 0.$$

根据阶的定义，有 $O_{\beta\gamma}(\alpha)=O_\beta(\alpha)+O_\gamma(\alpha)$.

(2) 仍按 (1) 中的记号，并假定 $0<k_1\leqslant k_2$, 则

$$\lim\frac{\beta+\gamma}{\alpha^{k_1}}=\lim\frac{\beta}{\alpha^{k_1}}+\lim\frac{\gamma}{\alpha^{k_2}}\cdot\lim\alpha^{k_2-k_1}=\begin{cases}c_1, & k_1<k_2,\\ c_1+c_2, & k_1=k_2,\end{cases}$$

于是由 $c_1\neq 0$, $c_2\neq 0$ 可知，$O_{\beta+\gamma}(\alpha)=k_1=\min\{O_\beta(\alpha),\ O_\gamma(\alpha)\}$. ▮

命题 5.1.4 设 α 与 β 都是无穷小量，且 $\alpha>0$, $\beta>0$, $O_\beta(\alpha)$ 存在，则

$$O_{\beta^k}(\alpha)=kO_\beta(\alpha)\quad(k>0).$$

命题 5.1.5 设 α, β 与 γ 都是无穷小量，且 $O_\beta(\alpha)$ 与 $O_\gamma(\beta)$ 都存在，则

$$O_\gamma(\alpha)=O_\gamma(\beta)\cdot O_\beta(\alpha).$$

命题 5.1.4 和命题 5.1.5 请读者自证.

例 5.1.3 设 $\gamma=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$, 求当 $x\to 0^+$ 时 γ 关于 x 的阶.

解 令 $\alpha=\sqrt{x}$, $\beta=\sqrt{x+\alpha}$, 则 $\gamma=\sqrt{x+\beta}$, 故由 $O_x(x)=1$ 及命题 5.1.3 和命题 5.1.4 可得

$$O_\alpha(x)=\frac{1}{2}O_{\alpha^2}(x)=\frac{1}{2}O_x(x)=\frac{1}{2},$$

$$O_\beta(x)=\frac{1}{2}O_{x+\alpha}(x)=\frac{1}{2}O_\alpha(x)=\frac{1}{4},$$

从而

$$O_\gamma(x)=\frac{1}{2}O_{\beta^2}(x)=\frac{1}{2}O_{x+\beta}(x)=\frac{1}{2}O_\beta(x)=\frac{1}{8}.$$

例 5.1.4 设 $\alpha=o(1)$, $\beta=o(\alpha)$, 求证 $\mathrm{e}^\alpha-\mathrm{e}^\beta\sim\alpha$.

证明 由 $\alpha=o(1)$ 可知, $\mathrm{e}^\alpha-1\sim\alpha$, 即

$$\mathrm{e}^\alpha-1=\alpha+o(\alpha);$$

又由 $\alpha=o(1)$ 和 $\beta=o(\alpha)$ 可知, $\mathrm{e}^\beta-1\sim\beta$, 即

$$\mathrm{e}^\beta-1=\beta+o(\beta).$$

综上可得

$$\frac{\mathrm{e}^\alpha-\mathrm{e}^\beta}{\alpha}=1-\frac{\beta}{\alpha}+\frac{o(\alpha)}{\alpha}-\frac{o(\beta)}{\alpha}=1-\frac{\beta}{\alpha}+\frac{o(\alpha)}{\alpha}-\frac{o(\beta)}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha},$$

从而由 $\beta=o(\alpha)$ 可知, $\mathrm{e}^\alpha-\mathrm{e}^\beta\sim\alpha$.

习题 5.1

5.1.1 设 α, β, γ 都是无穷小量, 求证:

(1) 如果 $\gamma=O(\beta)$, $\beta=O(\alpha)$, 则 $\gamma=O(\alpha)$;

(2) $O(\alpha\beta)=o(\alpha)$, $O(\alpha\beta)=o(\beta)$;

(3) $O(O(\alpha))=O(\alpha)$, $O(\alpha)+o(\alpha)=O(\alpha)$;

(4) 如果 $\beta=O(\alpha)$, 则 $O(\alpha)+O(\beta)=O(\alpha)$.

5.1.2 设 α, β, γ 都是无穷小量, 且 $O_\beta(\alpha)$ 与 $O_\gamma(\alpha)$ 都存在, 且 $\gamma=o(\beta)$, 求证

$$O_\gamma(\alpha)\geqslant O_\beta(\alpha).$$

5.1.3 设 α, β, γ 都是无穷小量, 且 $Z_\beta(\alpha)=c\alpha^k$, $\gamma=o(\alpha^k)$, 求证 $Z_{\beta+\gamma}(\alpha)=Z_\beta(\alpha)$.

5.1.4 当 $x\to0$ 时, 问下列等式是否成立?

(1) $[o(x)]^2=o(x^2)$; (2) $O(x^2)=o(x)$;

(3) $x\cdot o(1)=o(x)$; (4) $\dfrac{o(x^2)}{x}=o(x)$.

5.1.5 设 α 与 β 都是无穷小量, 且 $\alpha\sim\beta$. 问下列式中哪些成立? 对成立的予以证明, 不成立的举出例子.

(1) $o(\alpha)=o(\beta)$; (2) $O(\alpha)=O(\beta)$;

(3) $o(\alpha)\sim o(\beta)$; (4) $O(\alpha)\sim O(\beta)$;

(5) $O_\beta(\alpha)=O_\alpha(\beta)=1$.

5.1.6 求下列各无穷小量关于 x 的阶和主部 (这里 $x \to 0$):

(1) $\sqrt[n]{1+x^2}-1$; (2) $\sqrt{\dfrac{\sin^3 x}{x}}$;

(3) $3x+6x^2-5x^4$; (4) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$;

(5) $\sqrt{x\sin x}$; (6) $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^2}}$.

5.1.7 验证下列等式当 $x \to 0$ 时成立:

(1) $o(x^m)+o(x^n)=o(x^n)\quad (m \geqslant n > 0)$;

(2) $o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})\quad (m,n>0)$;

(3) 如果 $\alpha = O(1)$, 则 $\alpha \cdot o(x) = o(x)$;

(4) $x^m \cdot o(1) = o(x^m)\quad (m>0)$.

5.2 阶的估计

从应用的角度来说, 熟练而准确地进行阶的估计和计算是十分必要的, 因此, 本节将介绍最常用的估计方法, 即利用 Taylor 公式进行阶的估计与计算.

5.2.1 函数的 Taylor 展开式

带有 Peano① 型余项的 Taylor 公式已经给出了用多项式代替已知函数所产生的误差阶的估计, 它是对变量进行阶的估计的主要依据. 当然, 将一个比较复杂的函数进行展开, 还有不少技术性的问题需要处理, 我们将通过例子予以说明.

定理 5.2.1 (Taylor 公式)

设 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域 $U(x_0)$ 内具有直到 n 阶导数, 则对 $\forall\, x \in U(x_0)$, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),$$

其中 $o((x-x_0)^n)$ 称为 Peano 型余项, 且

$$\lim_{x\to x_0}\frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}=0.$$

特别地, 当 $x_0=0$ 时, 就得到 Maclaurin② 公式

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)\quad (x\to 0).$$

① Peano, 皮亚诺, 1858—1932, 意大利.

② Maclaurin, 麦克劳林, 1698—1746, 英国.

下面几个常见函数的 Maclaurin 展开式在以后阶的估计与计算中经常被用到:

1. $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

2. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$.

3. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$.

4. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$.

5. $(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \dfrac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$.

6. $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n})$.

7. $\arcsin x = x + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$.

此外，还有一些函数的展开式由于比较复杂，我们只写出前几项:

1. $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \dfrac{17}{315}x^7 + o(x^8)$.

2. $\mathrm{e}^{\sin x} = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

3. $\mathrm{e}^{\tan x} = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x^3 + o(x^3)$.

4. $\ln\cos x = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{1}{45}x^6 + o(x^7)$.

5. $\ln\dfrac{\sin x}{x} = -\dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{1}{180}x^4 - \dfrac{1}{2835}x^6 + o(x^7)$.

给定一个函数 $f(x)$ 之后，如何求出它的 Taylor 展开式呢？一是直接求出 $f(x)$ 在点 x_0 处的各阶导数，然后按公式写出展开式；二是利用某些函数的已有 Taylor 展开式进行展开. 后者是更方便的.

例 5.2.1 求 $\dfrac{x}{1+\ln(1+x^2)}$ 的带有 Peano 型余项的 5 阶 Maclaurin 展开式.

解 先将 $\dfrac{1}{1+\ln(1+x^2)}$ 展开至 $o(x^4)$. 由 $\ln(1+x)$ 的展开式可得

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4),$$

又由 $\dfrac{1}{1-x}$ 的展开式可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\ln(1+x^2)} &= 1 - \ln(1+x^2) + \ln^2(1+x^2) + o(\ln^2(1+x^2))\\ &= 1 - \left[x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right] + \left[x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right]^2 + o(\ln^2(1+x^2))\end{aligned}$$

$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) + x^4 + o(x^6) + o(\ln^2(1+x^2)).$$

又因为 $\ln(1+x^2) \sim x^2$ $(x \to 0)$, 所以 $o(\ln^2(1+x^2)) = o(x^4)$, 于是

$$\frac{x}{1+\ln(1+x^2)} = x\left[1 - x^2 + \frac{3}{2}x^4 + o(x^4)\right] = x - x^3 + \frac{3}{2}x^5 + o(x^5).$$

注 在例 5.2.1 中有两点读者需要注意:

(1) 确定 $\dfrac{1}{1+\ln(1+x^2)}$ 的展开式的最高阶. 因为 $\ln(1+x^2)$ 的展开式中首项次数为 2, 所以要使 $\dfrac{1}{1+\ln(1+x^2)}$ 的展开式中最高次项次数为 4, 必须把 $\dfrac{1}{1+\ln(1+x^2)}$ 展成关于中间变量 $\ln(1+x^2)$ 的二次项. 另一方面, 在 $\dfrac{1}{1+\ln(1+x^2)}$ 关于 $\ln(1+x^2)$ 的展开式中含 $\ln(1+x^2)$ 的最低次数为 1, 所以应将 $\ln(1+x^2)$ 展开到 x^4 项.

(2) 确定余项的阶. 要熟练掌握高阶无穷小的符号 "$o(x^n)$" 的运算法则. 本题中我们用到了无穷小的运算法则及以下等式

$$o(\ln^2(1+x^2)) = o(x^4),\quad o(x^4) + o(x^6) = o(x^4),\quad \left[x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right]^2 = x^4 + o(x^4).$$

例 5.2.2 将下列函数在点 $x=0$ 处进行 Taylor 展开至指定阶数.

(1) $\dfrac{x}{\sin x}$, (x^4);　　(2) $\dfrac{1+x-x^2}{1-x-x^2}$, (x^4);

(3) $\ln(1+x+x^2)$, (x^6);　　(4) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x+x^2}}$, (x^4).

解 (1) 先将 $\sin x$ 展到 x^5 项 (这是经过事先计算的, 请读者想想其原因), 即

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6),$$

则

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{x}{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^6)} = \frac{1}{1 - \left[\dfrac{x^2}{3!} - \dfrac{x^4}{5!} + o(x^5)\right]},$$

于是由 $\dfrac{1}{1-x}$ 的展开式可得

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sin x} &= 1 + \left[\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + o(x^5)\right] + \left[\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + o(x^5)\right]^2 + o\left[\left(\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + o(x^5)\right)^2\right] \\ &= 1 + \frac{x^2}{3!} + \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{5!}\right)x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

(2) 由 $\dfrac{1}{1-x}$ 的展开式可得

$$\frac{1}{1-(x+x^2)} = 1 + \sum_{k=1}^{4}(x+x^2)^k + o((x+x^2)^4),$$

于是

$$\frac{1+x-x^2}{1-x-x^2}=(1+x-x^2)\Big[1+\sum_{k=1}^{4}(x+x^2)^k+o(x^4)\Big].$$

将上式右端乘开后，略去高阶无穷小量 (有些项不必乘开) 得

$$\frac{1+x-x^2}{1-x-x^2}=1+2x+2x^2+4x^3+12x^4+o(x^4).$$

(3) 由于 $\ln(1+x+x^2)=\ln(1-x^3)-\ln(1-x)$, 并利用 $\ln(1+x)$ 的展开式可得

$$\begin{aligned}\ln(1+x+x^2)&=\ln(1-x^3)-\ln(1-x)\\&=-x^3-\frac{x^6}{2}+o(x^8)+\Big[\sum_{k=1}^{6}\frac{x^k}{k}+o(x^6)\Big]\\&=x+\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{1}{3}x^6+o(x^6).\end{aligned}$$

(4) 将 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x+x^2}}=[1+(x^2-x)]^{-\frac{1}{2}}$ 展开至 x^2 项，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x+x^2}}&=1-\frac{1}{2}(x^2-x)+\frac{3}{8}(x^2-x)^2+o((x^2-x)^2)\\&=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2).\end{aligned}$$

从而

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x+x^2}}=x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^4+o(x^4).$$

例 5.2.3 求 $\mathrm{e}^x\sin x$ 在点 $x=0$ 处的 Taylor 展开式至 x^{4n+3} 项，并给出 Peano 型余项.

解 设 $f(x)=\mathrm{e}^x\sin x$, 则直接计算可得

$$\begin{aligned}f'(x)&=(\mathrm{e}^x\sin x)'=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x),\\f''(x)&=(\mathrm{e}^x\sin x)''=2\mathrm{e}^x\cos x,\\f'''(x)&=(\mathrm{e}^x\sin x)'''=2\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x),\\f^{(4)}(x)&=(\mathrm{e}^x\sin x)^{(4)}=-4\mathrm{e}^x\sin x,\end{aligned}$$

所以对于 $k=0,1,2,\cdots$, 都有

$$\begin{aligned}f^{(4k)}(x)&=(-4)^k\mathrm{e}^x\sin x,\\f^{(4k+1)}(x)&=(-4)^k\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x),\\f^{(4k+2)}(x)&=(-4)^k2\mathrm{e}^x\cos x,\\f^{(4k+3)}(x)&=(-4)^k2\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x),\end{aligned}$$

于是由

$$f^{4k}(0)=0,\ f^{4k+1}(0)=(-4)^k,\ f^{4k+2}(0)=2(-4)^k,\ f^{4k+3}(0)=2(-4)^k$$

可得

$$\mathrm{e}^x\sin x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k4^k\left[\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!}+\frac{2x^{4k+2}}{(4k+2)!}+\frac{2x^{4k+3}}{(4k+3)!}\right]+R_{4n+3}(x),$$

并由 $(\mathrm{e}^x\sin x)^{4n+4}|_{x=0}=0$ 可知, $R_{4n+3}(x)=o(x^{4n+4})$.

例 5.2.4 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$, 求 $f^{(n)}(0)$.

解 将 e^{x^2} 进行 Taylor 展开. 由 e^x 的展开式可得

$$\mathrm{e}^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}+o(x^{2n}),$$

于是由 Taylor 展开式系数的含义及展开式的唯一性可得

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0,\quad n=2k+1,\\ \dfrac{(2k)!}{k!}=2^k(2k-1)!!,\quad n=2k\quad(k=0,1,2,\cdots).\end{cases}$$

例 5.2.5 求 $(1+x^2)\sin^2 x$ 在点 $x=0$ 处的 Taylor 展开式.

解 由 $\cos x$ 的展开式可得

$$\cos 2x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}+o((2x)^{2n+1}),$$

所以由 $o((2x)^{2n+1})=o(x^{2n+1})$ 可得

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1}),$$

于是

$$\begin{aligned}(1+x^2)\sin^2 x&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}x^{2k+2}}{(2k)!}+o(x^{2n+1})\\&=x^2+\sum_{k=2}^{n}(-1)^k2^{2k-1}\left[\frac{1}{(2k-2)!}-\frac{1}{(2k)!}\right]x^{2k}+o(x^{2k+1}).\end{aligned}$$

例 5.2.6 求 $\ln\dfrac{2x}{1+x}$ 在点 $x=1$ 处的 Taylor 展开式.

解 由于 $\ln\dfrac{2x}{1+x}$ 可以表示为

$$\ln\frac{2x}{1+x}=\ln x-\ln\frac{1+x}{2}=\ln[1+(x-1)]-\ln\left(1+\frac{x-1}{2}\right),$$

又由 $\ln(1+x)$ 的展开式可得

$$\ln(1+x-1)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k}+o((x-1)^n),$$

$$\ln\left(1+\frac{x-1}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k2^k}+o((x-1)^n),$$

于是

$$\ln\frac{2x}{1+x}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\frac{(x-1)^k}{k}+o((x-1)^n).$$

注　例 5.2.6 的解法说明，利用在点 $x=0$ 处的 Maclaurin 公式来求得在点 $x=x_0$ 处的 Taylor 展开式，通常的做法是先将 $f(x)$ 变形为 $\varphi(x-x_0)$, 然后将 $x-x_0$ 代到 $\varphi(t)$ 的 Maclaurin 公式中即可. 因此，我们建议读者应熟练掌握一些常见函数的 Maclaurin 公式.

5.2.2　阶与主部的求法

在本章的第 1 节中我们曾定义了阶与主部的概念. 对于无穷小量来说，这两个概念最重要了. 因为它们刻画了无穷小量的相对速度及主要数量关系 (主部). 那么，如何来有效地确定它们呢？阶和主部与 Taylor 公式又有怎样的联系呢？下面就来讨论这个问题.

在前面我们给出了 Taylor 公式，如果 $f(x)$ 能在点 $x=x_0$ 处展开成 n $(n\geqslant 1)$ 阶 Taylor 公式，则当 $x\to x_0$ 时，$\alpha=f(x)-f(x_0)$ 是无穷小量. 这个无穷小量被 Taylor 公式刻画得已经很清楚了，因此有了下面的内容.

定理 5.2.2 设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 某一邻域内具有直到 n 阶的连续导数. 如果存在 $k\in\mathbb{Z}^+$, $k\leqslant n$, 使得 $f^{(k)}(x_0)\neq 0$, 则当 $x\to x_0$ 时，$\alpha=f(x)-f(x_0)$ 关于 $x-x_0$ 的阶与主部均存在，且

$$Z_\alpha(x-x_0)=\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m,\quad O_\alpha(x-x_0)=m,$$

其中 m 是不超过 k 的某一正整数.

证明　由条件可知，存在 $m\in\mathbb{Z}^+$, 使得 $m\leqslant n$, 且

$$f^{(m)}(x_0)\neq 0,\quad f^{(k)}(x_0)=0\quad (k=1,2,\cdots,m-1),$$

故由 Taylor 公式可得

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+o((x-x_0)^m).$$

于是

$$f(x)-f(x_0)\sim\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m\quad (x\to x_0),$$

即

$$Z_\alpha(x-x_0)=\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m,\quad O_\alpha(x-x_0)=m.$$

定理 5.2.2 提供了一种求无穷小量 β 关于另一个无穷小量 α 的阶的方法. 例如, 如果当 $x\to x_0$ 时, $\beta=f(x)$, $\alpha=g(x)$ 都是无穷小量, 若由定理 5.2.2 得

$$O_\beta(x-x_0)=m,\quad O_\alpha(x-x_0)=n,$$

则 $O_\beta(\alpha)=\dfrac{m}{n}$.

例 5.2.7 设 $\alpha=\sin^6 2x$, $\beta=\mathrm{e}^{x^3}-x^3-1$, 求 $O_\beta(\alpha)$ $(x\to 0)$.

解 由 $\sin x$ 与 e^x 的 Taylor 展开式得

$$\alpha=2^6x^6+o(x^8)\sim 2^6x^6,\quad O_\alpha(x)=6,$$

$$\beta=\frac{1}{2}x^6+o(x^8)\sim\frac{1}{2}x^6,\quad O_\beta(x)=6,$$

于是 $O_\beta(\alpha)=1$ $(x\to 0)$.

例 5.2.8 设 $\alpha=\dfrac{1}{x^3}(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)$, $\beta=\ln\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$, 求 $O_\beta(\alpha)$ $(x\to\infty)$.

解 由

$$\alpha=\frac{1}{x^3}(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)\sim\frac{1}{x^4}\ (x\to\infty)$$

可知, $O_\alpha\left(\dfrac{1}{x}\right)=4$. 将 $\sin\dfrac{1}{x}$ 展开成 $\dfrac{1}{x}$ 的 Taylor 展开式, 得

$$x\sin\frac{1}{x}=x\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+o(\frac{1}{x^4})\right]=1-\frac{1}{6x^2}+o\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

故由 $\ln(1+x)$ 的展开式可得

$$\ln\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=\ln\left[1-\frac{1}{6x^2}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]=-\frac{1}{6x^2}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\sim-\frac{1}{6x^2},$$

即 $O_\beta(\dfrac{1}{x})=2$, 于是 $O_\beta(\alpha)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

例 5.2.9 设 $\beta=(a+b\cos^2 x)\sin x-x^3$, 试确定 a, b, 使得当 $x\to 0$ 时, $O_\beta(x)=5$, 并求出此时的 $Z_\beta(x)$.

解 将 β 改写为

$$\beta=(a+b)\sin x-b\sin^3 x-x^3.$$

如果 $a+b\neq 0$, 则 $\beta=O^*(\sin x)=O^*(x)$. 这与本题要求矛盾, 所以 $a+b=0$, 即

$$\beta=-b\sin^3 x-x^3.$$

由 $\sin x$ 的展开式可得

$$\begin{aligned}\beta&=-b\Big[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\Big]^3-x^3\\&=-b\Big[x^3-\frac{x^5}{2}+o(x^5)\Big]-x^3\\&=-(b+1)x^3+\frac{b}{2}x^5+o(x^5),\end{aligned}$$

故由定理 5.2.2 可知， $b+1=0$, 从而 $b=-1$, $a=1$, 此时有

$$O_\beta(x)=5,\quad Z_\beta(x)=-\frac{1}{2}x^5.$$

例 5.2.10 设 $\beta=n^2-\sin^{-1}\dfrac{1}{n^2}$, 求 $O_\beta\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$, $Z_\beta\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$.

解 由 β 的定义可知,

$$\beta=\frac{n^2\sin\dfrac{1}{n^2}-1}{\sin\dfrac{1}{n^2}}\sim\frac{n^2\sin\dfrac{1}{n^2}-1}{\dfrac{1}{n^2}}=n^2\Big(n^2\sin\frac{1}{n^2}-1\Big),$$

所以由 $n^2\sin\dfrac{1}{n^2}=1-\dfrac{1}{6n^4}+o\Big(\dfrac{1}{n^6}\Big)$ 可知,

$$\beta=n^2\Big(n^2\sin\frac{1}{n^2}-1\Big)\sim-\frac{1}{6n^2}+o\Big(\frac{1}{n^4}\Big),$$

从而

$$O_\beta\Big(\frac{1}{n}\Big)=2,\quad Z_\beta\Big(\frac{1}{n}\Big)=-\frac{1}{6n^2}.$$

例 5.2.11 设 $\beta=\dfrac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt[3]{1+3x}}-1$, 求 $Z_\beta(x)$ $(x\to0)$.

解 由 $\ln(1+x)$ 的展开式可得

$$\begin{aligned}\ln(1+\beta)&=\frac{1}{2}\ln(1+2x)-\frac{1}{3}\ln(1+3x)\\&=\frac{1}{2}\Big[2x-\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)\Big]-\frac{1}{3}\Big[3x-\frac{(3x)^2}{2}+o(x^2)\Big]\\&=\frac{1}{2}x^2+o(x^2),\end{aligned}$$

于是由 $\beta\sim\ln(1+\beta)$ 可得

$$Z_\beta(x)=\frac{1}{2}x^2\ (x\to0).$$

注 此题的解法利用了对数的性质，使计算量大大减少 (这种做法与对数求导法很相似). 否则直接将根式及分式进行展开，是很繁杂的.

在进行 Taylor 展开时，要注意展开到足够的项数 (当然太多也不必要，只要能将主部突出即可), 否则可能出现错误.

习题　5.2

5.2.1　将下列函数在点 $x=0$ 处展开到指定项：

(1) $xe^{\sin x}$，(x^4)；　　(2) $\sin^2 x\sin x^2$，(x^6)；

(3) $\dfrac{\ln(1+x^2)}{1+x}$，(x^4)；　　(4) $\tan x\arctan x$，(x^4).

5.2.2　将下列函数在指定点处 Taylor 展开至 x^n $(n\geqslant 1)$ 项，并指出 Peano 型余项.

(1) $\ln(3x-2)$，$x_0=1$；　　(2) $e^{\pi x}$，$x_0=1$；

(3) $\ln\dfrac{1+x}{1-2x}$，$x=0$；　　(4) $\sin^2\pi x$，$x=1$.

5.2.3　判断下列无穷小量的阶 $O_\alpha(x)$ $(x\to 0)$.

(1) $\alpha=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}$；　　(2) $\alpha=e^{2x}-\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $\ln(\sin x+\cos x)$.

5.2.4　试确定常数 a, b, 使得 $x\to 0$ 时，下列式子成立：

(1) $\alpha=e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}=O^*(x^3)$；　　(2) $\alpha=(a+b\cos x)\sin x-x=O^*(x^5)$.

5.2.5　对下列无穷小量 α 与 β, 求 $O_\beta(\alpha)$.

(1) $\beta=x^3+x^6$，$\alpha=x^6$，$(x\to 0)$；

(2) $\beta=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^3}$，$\alpha=x^6$，$(x\to 0)$；

(3) $\beta=\sqrt{x(1-\cos x)}$，$\alpha=\sin x$，$(x\to 0^+)$；

(4) $\beta=\ln\dfrac{1+x}{2}$，$\alpha=\sqrt{x}-1$，$(x\to 1)$.

5.2.6　设 $\alpha=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}-1$, 求 $Z_\alpha(x)$, $(x\to 0)$.

5.2.7　利用无穷小量主部求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{\sin^2 2x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt{x^2-2x})$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$.

5.2.8　设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有二阶导数，且

$$\lim_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3,$$

求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

5.2.9　设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有任意阶非零导数，且 θ $(0<\theta<1)$ 满足

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n,$$

求证 $\lim\limits_{x\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$. (提示：先将函数 $f(x)$ 展开到 x^{n+2} 项，建立关于 $f^{(n)}(\theta x)$ 的等式，再考查 $f^{(n)}(\theta x)$ 的二次展开式.)

5.3 阶的应用

阶的概念是与极限过程紧密相联的，它是对变量之间相对变化速度的一种定性描述. 因此，它在计算极限、级数与积分收敛性问题中有许多应用. 本节将通过一些例子加以说明.

5.3.1 利用阶计算极限

在诸多的极限求值问题中，不定型的定值问题是十分重要的，其中最基本的是 $\dfrac{0}{0}$ 和 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，因为其他一些不定型均可以经过初等变换化为 $\dfrac{0}{0}$ 和 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型. 而 “$\dfrac{0}{0}$” 的含义是：被求极限的变量 y 可表示成两个无穷小量 α, β 的商，即 $y=\dfrac{\beta}{\alpha}$. 这种类型的极限求解方法有多种 (如第 6 章将介绍的 Stolz 定理和 L'Hospital 法则等). 下面讨论如何利用阶的估计与运算来求极限值.

设当 $x\to 0$ 时，α, β 都是无穷小量，并且 $O_\alpha(x)$, $O_\beta(x)$ 均存在，则显然有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta}{\alpha}=\begin{cases}0, & O_\alpha(x)<O_\beta(x),\\ \dfrac{Z_\beta(x)}{Z_\alpha(x)}, & O_\alpha(x)=O_\beta(x),\\ \infty, & O_\alpha(x)>O_\beta(x).\end{cases}$$

例 5.3.1 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^5}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{3x^2}\right)$.

解 由 e^x 的展开式可得

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x\left[1-t^2+\frac{t^4}{2!}+o(t^5)\right]\mathrm{d}t=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5+o(x^6),$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^5}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{3x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{10}+o(x)\right]=\frac{1}{10}.$$

注 如用 L'Hospital 法则来求解例 5.3.1 也不困难.

例 5.3.2 求极限 $\lim\limits_{x\to +\infty}x^3(\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt[4]{x^4+4x^2})$.

解 由 $(1+x)^\mu$ 的 Taylor 展开式可得

$$\sqrt[3]{x^3+3x}=x\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^2}}=x\left[1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right],$$

$$\sqrt[4]{x^4+4x^2}=x\sqrt[4]{1+\frac{4}{x^2}}=x\left[1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{2x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right],$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt[4]{x^4+4x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}+o(1)\right]=\frac{1}{2}.$$

例 5.3.3 设 $x_n=n-\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{k}{n^{\frac{3}{2}}}\ (n=1,2,\cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 由 $\cos x$ 的 Taylor 展开式可得

$$\begin{aligned}x_n&=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\cos\frac{k}{n^{\frac{3}{2}}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k^2}{2n^3}+o\left(\frac{k^2}{n^3}\right)\right]=\frac{1}{2n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}o\left(\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{2n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+o(1)=\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^2}+o(1),\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^2}+o(1)\right]=\frac{1}{6}.$$

注 此题中应用了阶的运算，即

$$o\left(\frac{k^2}{n^3}\right)=o\left(\frac{1}{n}\right)\ (k=1,2,\cdots,n),\quad \sum_{k=1}^{n}o\left(\frac{1}{n}\right)=o(1).$$

类似于这种运算还需熟练掌握.

例 5.3.4 设 $f(x)\in C^2[0,1]$, 求证

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=\frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

证明 由定积分的性质可知，对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由 $f(x)\in C^2[0,1]$ 可知， $f(x)$ 在点 $x=\dfrac{k}{n}\ (k=1,2,\cdots,n-1)$ 的 Taylor 展开式为

$$f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)=f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(x-\frac{k}{n}\right)+\frac{f''(\xi_k)}{2!}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2,$$

其中 ξ_k 介于 x 与 $\dfrac{k}{n}$ 之间.

由 $f(x)\in C^2[0,1]$ 可知， $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界，所以当 $x\in\left[\dfrac{k}{n},\dfrac{k+1}{n}\right]$ 时，有

$$\frac{f''(\xi_k)}{2!}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2=o\left(\frac{1}{n}\right)\quad(n\to\infty),$$

从而

$$
\begin{aligned}
n\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right]&=n\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left[f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(x-\frac{k}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\mathrm{d}x\\
&=n\sum_{k=0}^{n-1}f'\left(\frac{k}{n}\right)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x+\sum_{k=0}^{n-1}o\left(\frac{1}{n}\right)\\
&=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}f'\left(\frac{k}{n}\right)+o(1).
\end{aligned}
$$

由定积分的定义可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}n\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right]&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f'\left(\frac{k}{n}\right)\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=\frac{f(1)-f(0)}{2}.
\end{aligned}
$$

例 5.3.5 设 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, 试确定常数 A 和 B, 使得

$$
\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-A-Bx}{x\sin x}
$$

存在，并求其值.

解 由 $\ln(1+x)$ 的 Taylor 展开式可得

$$
\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{x}\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2),
$$

于是由 e^x 的 Taylor 展开式可得

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=\mathrm{e}^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}\\
&=\mathrm{e}\left\{1+\left[-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right]+\frac{1}{2}\left[-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right]^2+o(x^2)\right\}\\
&=\mathrm{e}\left[1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2+o(x^2)\right]\\
&=\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2}x+\frac{11\mathrm{e}}{24}x^2+o(x^2).
\end{aligned}
$$

另一方面，由 $x\sin x\sim x^2$ 可知，要使所求极限存在，必有

$$
f(x)-A-Bx=O^*(x^2),
$$

即

$$
\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2}x+\frac{11\mathrm{e}}{24}x^2-A-Bx=O^*(x^2),
$$

于是当 $A=\mathrm{e}$, $B=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ 时，所求极限存在，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-A-Bx}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{11\mathrm{e}}{24}\cdot\frac{x^2}{x\sin x}=\frac{11\mathrm{e}}{24}.$$

例 5.3.6 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\sin x-\sin\tan x}{\tan\tan x-\sin\sin x}$.

解 由 $\tan x$ 及 $\sin x$ 的 Taylor 展开式可得

$$\begin{aligned}\tan\tan x&=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+o(\tan^4 x)\\&=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)+\frac{1}{3}\left[x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)\right]^3+o(x^4)\\&=x+\frac{2}{3}x^3+o(x^4),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\sin x&=\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(\sin^4 x)\\&=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)-\frac{1}{6}\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right]^3+o(x^4)\\&=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

于是

$$\tan\tan x-\sin\sin x=x^3+o(x^4).$$

又由

$$\begin{aligned}\tan\sin x&=\sin x+\frac{1}{3}\sin^3 x+o(\sin^4 x)\\&=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)+\frac{1}{3}\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right]^3+o(x^4)\\&=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^4),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\tan x&=\tan x-\frac{1}{6}\tan^3 x+o(\tan^4 x)\\&=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)-\frac{1}{6}\left[x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)\right]^3+o(x^4)\\&=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\end{aligned}$$

可知

$$\tan\sin x-\sin\tan x=o(x^4),$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan\sin x-\sin\tan x}{\tan\tan x-\sin\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{x^3+o(x^4)}=0.$$

注 本题如采用 L'Hospital 法则求解，那将走入歧途. 另外，在进行 Taylor 展开时，应先展开分母，根据分母的阶来确定分子的展开式中最高次项的次数. 本题如先展开分子的话，想要计算出分子的主部需要展开到 x^7 项，即

$$\tan\sin x-\sin\tan x=\frac{1}{30}x^7+o(x^8),$$

这将大大增加计算量.

例 5.3.7 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x$.

解 对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 由 Taylor 公式可得

$$\frac{1}{(1+x^2)^n}=\mathrm{e}^{-n\ln(1+x^2)}=\mathrm{e}^{-n[x^2+o(x^3)]}=\mathrm{e}^{-nx^2}\cdot\mathrm{e}^{-no(x^3)}.$$

记 $\alpha(x)=-no(x^3)$, 则 $\alpha(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right]$ 上连续，并且当 $x\in\left[0,\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right]$ 时，由

$$nx^3\leqslant n\cdot n^{-1}=1\quad(n\in\mathbb{Z}^+)$$

可知,

$$\alpha(x)=o(1)\ \ (x\to 0),$$

故由积分第一中值定理可知，对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}\cos x\cdot\mathrm{e}^{\alpha(x)}\cdot\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^{\alpha_n(\xi_n)}\cos\xi_n\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

于是由

$$0\leqslant\xi_n\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{n}},\quad\lim_{n\to\infty}\alpha_n(\xi_n)=0,\quad\lim_{n\to\infty}\cos\xi_n=1$$

可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}\frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt[6]{n}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\end{aligned}$$

5.3.2 阶的估计在级数与广义积分收敛性中的应用

众所周知，如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 这只是级数收敛的必要条件. 若使一个级数收敛，仅有一般项趋于零是不够的，还要看它趋于零的速度. 也就是说，一个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 能否收敛，完全由它的一般项 a_n 趋于零的速度决定. 正项级数收敛性的比较判别法说的就是这一事实. 由此可见，正确地判定级数一般项趋于零的阶就显得尤为重要了.

广义积分收敛性与级数收敛性有着密切的联系和许多相似之处，在此我们一并讨论.

定理 5.3.1 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c.$$

(1) 当 $c \neq 0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 同时收敛或同时发散;

(2) 当 $c = 0$ 时，如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

定理 5.3.1 是比较判别法的极限形式，是正项级数或一般级数的绝对收敛性判别中常用的. 方法是将级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与某个已知其收敛性的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 进行比较 (实际上是两个级数一般项趋于零的阶的比较).

比较判别法可用阶的语言叙述如下.

命题 5.3.1 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

(1) 如果 $a_n = O^*(b_n)$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 同时收敛或同时发散;

(2) 如果 $a_n = O(b_n)$, 则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时， $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

例 5.3.8 设 $f''(0)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, 求证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

证明 由 $f''(0)$ 存在可知， $f(0)$, $f'(0)$ 均存在，且

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0,$$

所以

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

于是由 Taylor 公式可得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)=\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2).$$

由上式可知,

$$\left|f\Big(\frac{1}{n}\Big)\right|=\frac{1}{2}|f''(0)|\cdot\frac{1}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)=O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\quad(n\to\infty),$$

从而由命题 5.3.1 可知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\Big(\frac{1}{n}\Big)$ 绝对收敛.

例 5.3.9 判别级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\ln n)^{-\ln\ln n}$ 的收敛性.

解 设 $a_n=(\ln n)^{-\ln\ln n}$ $(n=2,3,\cdots)$, 则经初等变形后, 得

$$a_n=(\ln n)^{-\ln\ln n}=\mathrm{e}^{-(\ln\ln n)^2}=n^{-\frac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}}.$$

记 $\beta_n=\dfrac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}$, 则由 $\beta_n=\dfrac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}\to 0$ $(n\to\infty)$ 可得

$$\frac{\frac{1}{n}}{a_n}=\frac{1}{na_n}=\frac{1}{n^{1-\beta_n}}\to 0\quad(n\to\infty),$$

于是由 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散可知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

例 5.3.10 试确定 α 的值, 使级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}\left[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)-1\right]$ 收敛.

解 由 $\ln(1+x)$ 的 Taylor 展开式可得

$$\begin{aligned}\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)&=\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right]\\&=1+\frac{1}{12n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),\end{aligned}$$

从而

$$n^{\alpha}\left[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)-1\right]=\frac{1}{12}n^{\alpha-2}+o(n^{\alpha-2})=O(n^{\alpha-2}).$$

由此可知, 当 $\alpha<1$ 时, 原级数收敛, 其余情形均发散.

例 5.3.11 设 $p>0$, 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{e}-\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\right]^p$ 的收敛性.

解 由 $\ln(1+x)$ 及 e^x 的 Taylor 展开式可得

$$\begin{aligned}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n&=\mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})}=\mathrm{e}^{n[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})]}\\&=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}=\mathrm{e}\left[1-\frac{1}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right],\end{aligned}$$

于是

$$\left[\mathrm{e}-\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\right]^p=\mathrm{e}^p\left[\frac{1}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right]^p=O^*\Big(\frac{1}{n^p}\Big)\quad(n\to\infty).$$

由此可知，当 $p>1$ 时，原级数收敛，其余情形均发散.

例 5.3.12 设 $p>0$, 判别级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\ln^2\cos\dfrac{\pi}{n^p}$ 的收敛性.

解 由 $\cos x$ 的 Taylor 展开式可得

$$\cos\frac{\pi}{n^p}=1-\frac{\pi^2}{2}n^{-2p}+o(n^{-2p}),$$

于是由 $\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$ 可得

$$\ln^2\left[1-\frac{\pi^2}{2}n^{-2p}+o(n^{-2p})\right]\sim\left[-\frac{\pi^2}{2}n^{-2p}+o(n^{-2p})\right]^2\quad(n\to\infty),$$

即

$$\ln^2\cos\frac{\pi}{n^p}\sim\left[-\frac{\pi^2}{2}n^{-2p}+o(n^{-2p})\right]^2=O^*(n^{-4p})\quad(n\to\infty).$$

由此可知，当 $p>\dfrac{1}{4}$ 时，原级数收敛，其余情形均发散.

例 5.3.13 设 $a>1$, 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log_2(1+a^{-\ln n})$ 的收敛性.

解 设 $b_n=\log_2(1+a^{-\ln n})\ (n\in\mathbb{Z}^+)$, 则由对数性质可得

$$b_n=\log_2(1+a^{-\ln n})=\ln(1+a^{-\ln n})\cdot\log_2\mathrm{e}=O^*(a^{-\ln n})\quad(n\to\infty),$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{-\ln n}$ 具有相同的收敛性.

另一方面，由 Cauchy 积分判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{-\ln n}$ 与广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{a^{\ln x}}$ 同收敛或同发散，于是由

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{a^{\ln x}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}}{a}\right)^u\mathrm{d}u,$$

可知，当 $a>e$ 时，积分收敛，同时原级数收敛，其余情形均发散.

例 5.3.14 判别广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)^\alpha}{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^\beta}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 因为当 $x\to 0$ 时，有 $\mathrm{e}^x-1\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$, 所以当 $x\to+\infty$ 时，有

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\sim\frac{1}{x},\quad \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x},$$

于是

$$\frac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)^\alpha}{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^\beta}\sim\frac{1}{x^{\alpha-\beta}}\quad(x\to+\infty).$$

由此可知，当 $\alpha-\beta>1$ 时，原积分收敛，其余情形均发散.

例 5.3.15 判别广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 将积分写成

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2 x}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2 x}.$$

记 $f_n(x)=\frac{1}{1+(n\pi)^4\sin^2 x}$, 则对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{1+x^4\sin^2 x}\mathrm{d}x<\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(n\pi)^4\sin^2 x}=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}f_n(x)\mathrm{d}x,$$

并由 $f_n(x)\leqslant 1$ 可得

$$\begin{aligned}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}f_n(x)\mathrm{d}x&=\int_{n\pi}^{n\pi+n^{-\frac{4}{3}}}f_n(x)\mathrm{d}x+\int_{n\pi+n^{-\frac{4}{3}}}^{(n+1)\pi}f_n(x)\mathrm{d}x\\&<n^{-\frac{4}{3}}+\int_{n\pi+n^{-\frac{4}{3}}}^{(n+1)\pi-n^{-\frac{4}{3}}}f_n(x)\mathrm{d}x+\int_{(n+1)\pi-n^{-\frac{4}{3}}}^{(n+1)\pi}f_n(x)\mathrm{d}x\\&<2n^{-\frac{4}{3}}+\frac{\pi}{1+(n\pi)^4\sin^2(n^{-\frac{4}{3}})}.\end{aligned}$$

故由 $\sin n^{-\frac{4}{3}}=n^{-\frac{4}{3}}+o(n^{-\frac{8}{3}})$ 可得

$$1+(n\pi)^4\sin^2(n^{-\frac{4}{3}})=1+(n\pi)^4\left[n^{-\frac{8}{3}}+o(n^{-4})\right]=O^*(n^{\frac{4}{3}})\quad(n\to\infty),$$

从而

$$2n^{-\frac{4}{3}}+\frac{\pi}{1+(n\pi)^4\sin^2(n\pi+n^{-\frac{4}{3}})}=O(n^{-\frac{4}{3}})\quad(n\to\infty).$$

综上可知,

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2 x}=O(n^{-\frac{4}{3}})\quad(n\to\infty),$$

于是由级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2 x}$ 收敛可知，原广义积分也收敛.

例 5.3.16 判别广义积分 $\int_0^1\frac{x\sin x}{x-\sin x}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 因为当 $x\to 0$ 时，有

$$x\sin x\sim x^2,\quad x-\sin x=\frac{x^3}{6}+o(x^3)\sim\frac{x^3}{6},$$

所以

$$\frac{x\sin x}{x-\sin x}\sim\frac{6}{x}\quad(x\to 0),$$

于是由 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 发散可知，原积分发散.

例 5.3.17 设 $p,\ q>0$, 判别广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{1}{x^p}+\sin\frac{1}{x^q}\right)\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 因为当 $x\to 0$ 时，有

$$\cos x\sim 1-\frac{1}{2}x^2,\quad \sin x\sim x,$$

所以

$$\cos\frac{1}{x^p}+\sin\frac{1}{x^q}=1-\frac{1}{2x^{2p}}+o(x^{-2p})+\frac{1}{x^q}+o(x^{-q})\quad(x\to+\infty),$$

于是

$$\begin{aligned}\cos\frac{1}{x^p}+\sin\frac{1}{x^q}-1&=\frac{1}{x^q}-\frac{1}{2x^{2p}}+o(x^{-q})+o(x^{-2p})\\&=O^*(x^{-\min\{q,\ 2p\}})\quad(x\to+\infty).\end{aligned}$$

由此可知，当 $p>\dfrac{1}{2}$, 且 $q>1$ 时，原积分收敛，其余情形均发散.

习题 5.3

5.3.1 利用不定积分性质及积分公式求下列不定积分：

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan\tan x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}$;

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$;

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\arctan x}{\tan x-\arcsin x}$;

(5) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt{x^2-2x})$;

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right)$;

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+2})$;

(9) $\displaystyle\lim_{x\to0+}x^{x^x-1}$;

(10) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1+\alpha x)^\beta-(1+\beta x)^\alpha}{x^2}$.

5.3.2 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k}{n^2}$.

5.3.3 试确定常数 p, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{99}}{n^p-(n-1)^p}=\frac{1}{100}.$$

5.3.4 设 $f(x)$ 具有 4 阶连续导数，求证

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h^4}\sum_{k=0}^{4}(-1)^kC_4^kf(x+kh)=f^{(4)}(x).$$

5.3.5 判别下列级数的收敛性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\cos\frac{1}{n}+\sin\frac{1}{n}\right)$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ln\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{n}\right)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\right]^p$; (4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b})$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\frac{n-1}{n+1}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln n}}$; (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}\sin\frac{1}{n^p}\ (p>0)$.

5.3.6 设 $\{na_n\}$ 单调减少趋于零，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，求证

$$a_n=o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\quad(n\to\infty).$$

5.3.7 判别如下广义积分的收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x|\cos x|}\,\mathrm{d}x$; (2) $\int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(1+x)}\,\mathrm{d}x$; (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^p x}{\ln\cos x}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\int_1^{+\infty}x^p\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$; (6) $\int_1^{+\infty}\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^p\mathrm{d}x$.

5.3.8 判别积分 $\int_0^1\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x$ 的收敛性，其中 $\left[\frac{1}{x}\right]$ 为取整函数.

5.3.9 设 p, q 为常数，讨论积分 $\int_2^{+\infty}\ln(1+x^p)\left(\ln\frac{x^q+1}{x^q-1}-2x\right)\mathrm{d}x$ 的收敛性.

5.3.10 求使极限

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)^{\alpha}\int_0^x\frac{t}{\ln^2 t}\,\mathrm{d}t$$

存在的 α 值及相应的极限值.

第 6 章　极限的存在性与求值问题

极限理论是数学分析的基础，深刻理解极限概念、掌握极限的思想和方法，对学好数学分析至关重要．本章将通过各种例题阐述关于极限存在性的证明和极限求值问题的一些常用方法和技巧．

6.1　关于极限定义的若干注释

在数学分析中，极限的定义是按变量的不同类别和过程的不同种类分别给出的．极限的形式是多种多样的，它是由变量和过程的多样性决定的，这里所说的变量并非指体现过程的那个量 (如数列 $\{x_n\}$ 中的变数 n, 函数 $f(x)$ 中的自变量 x 等), 而是指我们观察、研究有无确定的变化趋势的那个主体对象的变量，如 $x_n, f(x)$ 以及积分和 $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ 等．我们所说的过程分为

$$n \to \infty,\ \ x \to \infty,\ \ x \to +\infty,\ \ x \to -\infty,\ \ x \to x_0,\ \ x \to x_0^+,\ \ x \to x_0^-$$

以及 $\lambda(T) \to 0$ 等八种形式．

虽然极限有多种形式，但只要对其中的几种进行深入剖析，理解其实质，就不难掌握其他形式，因此我们仅以三种形式的极限为例，给出一些注释．为叙述方便，把这三种极限的定义写在下面．

定义 6.1.1　设 $\{x_n\}$ 为数列，如果存在常数 a, 使得对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

则称当 $n \to \infty$ 时数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 或 $x_n \to a\ (n \to \infty)$.

定义 6.1.2 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内有定义．如果存在常数 A, 使得对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 或 $f(x) \to A\ (x \to x_0)$.

定义 6.1.3　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，T 代表对 $[a,b]$ 的分法：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

并记

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\ \ (k = 1, 2, \cdots, n),\quad \lambda(T) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \{\Delta x_k\}.$$

如果存在某个常数 I, 使得对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任意的分法 T, 当 $\lambda(T) < \delta$

时，对 $\forall\ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, 有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I\right| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积， I 称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

从上面三个定义可以看出，不论哪种形式的极限，都离不开三个要素：变量、过程、极限值．作为极限的定义，最重要的就是准确地刻画过程及变量与极限值接近程度的无限性，而这种刻画是由两个不等式来实现的．例如：定义 6.1.1 中的 “ $n > N$ ”和“ $|x_n - a| < \varepsilon$ ”, 定义 6.1.2 中的“ $0 < |x - x_0| < \delta$ ”和“ $|f(x) - A| < \varepsilon$ ”, 定义 6.1.3 中的 “ $\lambda(T) < \delta$ ” 和 “ $|\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I| < \varepsilon$ ”．在这里，每个定义中的前一个不等式刻画的是过程的不同阶段 (它是由不同的 N 或 δ 来体现的), 后一个不等式刻画了变量与极限值接近程度的无限性 (由 ε 的任意性来体现).

6.1.1 关于过程的刻画和变量的刻画

刻画过程的不等式是根据刻画变量的不等式来确定的，它是后者成立的条件.

对刻画变量的不等式来说，重要的是 ε 的任意性，而不是具体形式，因为所体现的是变量与极限值可以任意地接近．所以在具体证明过程中，它可以是 ε, 也可以是 2ε 或 $\sqrt{\varepsilon}$ 等，有时还可以用 $\dfrac{1}{m}$ $(m = 1, 2, \cdots)$ 来代替 ε. 总之，只要能刻画变量与极限值能任意接近就行.

对于刻画过程的不等式来说，在给定了 ε 之后，重要的是在于 N 或 δ 的存在，而不在于它们的大小 (或者说这样的 N 或 δ 能有多少个)．事实上，对于一个给定的变量来说 (当然是 ε 给定之后), 要么这样的 N 或 δ 一定存在 (而一旦存在就有无数个), 要么就根本不存在．正因为如此，有时在证明过程中为了便于寻找适合要求的 N 或 δ, 我们常常适当放大变量与极限值之差的绝对值.

思考题 1 设 $\{x_n\}$ 为数列， a 为常数．下面说法是否与定义 6.1.1 等价？理由为何？

(1) 对 $\forall\, \varepsilon > 0$ 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| \leqslant \varepsilon$.

(2) 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在实数 $X > 0$, 当 $n > X$ 时，有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

(3) 对 $\forall\, \varepsilon > 0$ $(0 < \varepsilon < 1)$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

(4) 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$.

(5) 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| \leqslant \varepsilon^2$.

(6) 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 对 $\forall\, p \in \mathbb{Z}^+$, 有 $|x_{N+p} - a| \leqslant \varepsilon$.

(7) M 为正常数, 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{Z}^+$, 当 $n>N$ 时, 有 $|x_n-a|\leqslant M\varepsilon$.

思考题 2 下列各条件刻画了数列 $\{x_n\}$ 的什么性质 (其中 a 为常数)?

(1) 对 $\forall\,\varepsilon\geqslant 0$, 存在 $N\in\mathbb{Z}^+$, 当 $n>N$ 时, 有 $|x_n-a|\leqslant\varepsilon$.

(2) 对 $\forall\,\varepsilon>0$ 及 $\forall\,n\in\mathbb{Z}^+$, 有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

(3) 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 除有限项外, 均有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

(4) 存在 $N\in\mathbb{Z}^+$, 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 当 $n>N$ 时, 有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

(5) 对 $\forall\,\varepsilon\left(0<\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 存在 $N\in\mathbb{Z}^+$, 当 $n>N$ 时, 有 $|x_n-a|<\sin\varepsilon$.

(6) 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{Z}^+$, 且 $N\leqslant N_0$ (N_0 为某固定的正整数), 当 $n>N$ 时, 有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

思考题 3 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义, 下列说法是否与定义 6.1.2 等价?

(1) 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon\delta$.

(2) 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\varepsilon$ 时, 有 $|f(x)-A|<\delta$.

(3) 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\varepsilon\delta$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(4) 对 $\forall\,m\in\mathbb{Z}^+$, 存在 $n\in\mathbb{Z}^+$, 当 $0<|x-x_0|<\dfrac{1}{n}$ 时, 有 $|f(x)-A|<\dfrac{1}{m}$.

思考题 4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, I 为常数, T 为表示区间 $[a,b]$ 的一种分法: $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$. 下列说法是否与定义 6.1.3 等价? 为什么?

(1) 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对 $[a,b]$ 的任意分法 T, 当 $\lambda(T)<\delta$ 时, 有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x_k-I\right|<\varepsilon.$$

(2) 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{Z}^+$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k-I\right|<\varepsilon,$$

其中 $\Delta x_k=\dfrac{b-a}{n}$, $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]\ (k=1,2,\cdots,n)$.

6.1.2 关于变量不存在极限的描述

为了更深入地掌握极限概念, 需要从反面来理解极限定义. 准确地对变量没有极限或不以某常数为极限的情形进行刻画, 也是证明某些极限存在性问题 (特别是利用反证法) 时所必需的.

1. 数列 $\{x_n\}$ 不以常数 a 为极限: 存在 $\varepsilon_0>0$, 对 $\forall\,N\in\mathbb{Z}^+$, 存在 $n'\in\mathbb{Z}^+$, 使得 $n'>N$, 且

$$|x_{n'}-a|\geqslant\varepsilon_0.$$

这种描述可导出下面的命题.

命题 6.1.1 数列 $\{x_n\}$ 不以 a 为极限的充分必要条件是：存在 $\varepsilon_0>0$ 及满足条件 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$ 的正整数列 $\{n_k\}$, 使得 $n_k\to+\infty\ (k\to\infty)$, 且

$$|x_{n_k}-a|\geqslant\varepsilon_0.$$

由此又可得出下面判别数列收敛的充分必要条件.

命题 6.1.2 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的充分必要条件是： $\{x_n\}$ 的任意子列 $\{x_{n_k}\}$ 均以 a 为极限.

2. 当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 不以常数 A 为极限：存在 $\varepsilon_0>0$, 对 $\forall\,\delta>0$, 存在满足条件 $0<|x'-x|<\delta$ 的实数 x', 使得 $|f(x')-A|\geqslant\varepsilon_0$.

如果在上面说法中，令 $\delta_n=\dfrac{1}{n}\ (n\in\mathbb{Z}^+)$, 并记相应的 $x'=x_n\ (n\in\mathbb{Z}^+)$, 则 $0<|x_n-x_0|<\dfrac{1}{n}$, 且 $|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0$. 如用命题形式可叙述如下.

命题 6.1.3 当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 不以 A 为极限的充分必要条件是：存在 $\varepsilon_0>0$ 和数列 $\{x_n\}$, 满足 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$, 且

$$|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon_0.$$

由此立即得出熟知的 Heine① 定理.

命题 6.1.4 当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限的充分必要条件是：对任意一个数列 $\{x_n\}$, 如果 $x_n\neq x_0\ (n\in\mathbb{Z}^+)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, 必有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

关于定义 6.1.3 的否定 (即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积) 可叙述为：对任意的常数 I, 存在 $\varepsilon_0>0$, 对 $\forall\,\delta>0$, 存在一种分法 $T':a=x_0'<x_1'<x_2'<\cdots<x_n'=b$ 及一组点 $\xi_k'\in[x_{k-1}',x_k']\ (k=1,2,\cdots)$, 使得 $\lambda(T')<\delta$, 且

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k')\Delta x_k'-I\right|\geqslant\varepsilon_0.$$

由于积分的情况比较复杂，它不易像数列和函数那样由此导出简单的命题. 因此，这里就不再讨论了.

例 6.1.1 用极限定义证明：对 $\forall\,a\in[-1,1]$, 数列 $\{\sin n\}$ 不以 a 为极限.

分析 根据命题 6.1.1, 应证明存在一个正整数列 $\{n_k\}$, 使得 $\{\sin n_k\}$ 不以 a 为极限. 为此，首先要确定一个 $\varepsilon_0>0$, 希望满足不等式 $|\sin n-a|\geqslant\varepsilon_0$ 的 n 有无限多个. 一般来说， ε_0 应选得较小些，这便于放大不等式.

① Heine, 海涅， 1821—1881, 德国.

我们来看一下 $\sin x$ 在一个周期上的图像 (图 6.1.1). 为了分析方便, 不妨设 $a \geqslant 0$, 这样 $x_0 = \arcsin a \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. 要使 $|\sin n - a| \geqslant \varepsilon_0$, 只要 n 落在区间 $[x_1, x_2]$ 和 $[x_3, x_4]$ 之外. 因此我们可考虑在区间 $[(2k+1)\pi, 2(k+1)\pi]$ 上选取 n_k.

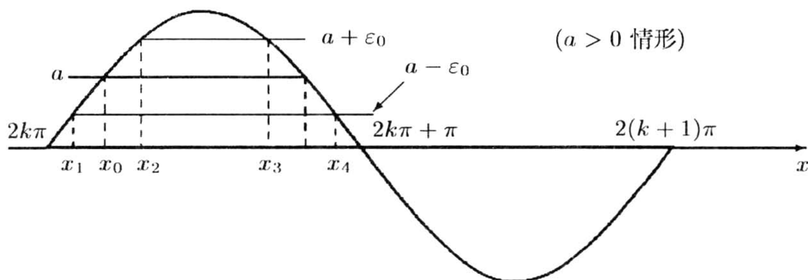


图 6.1.1

注意到 a 可能为 0, 我们应在更小一点的范围 $[x_5, x_6]$ 上选 n_k (图 6.1.2). 这就要求 ε_0 选得适当小, 以使区间 $[x_5, x_6]$ 的长度大于 1, 保证有整数落在区间 $[x_5, x_6]$ 上. 事实上, 只要我们选取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $[x_5, x_6] = \left[2k\pi + \dfrac{5}{4}\pi, 2k\pi + \dfrac{7}{4}\pi\right]$ 就可以了.

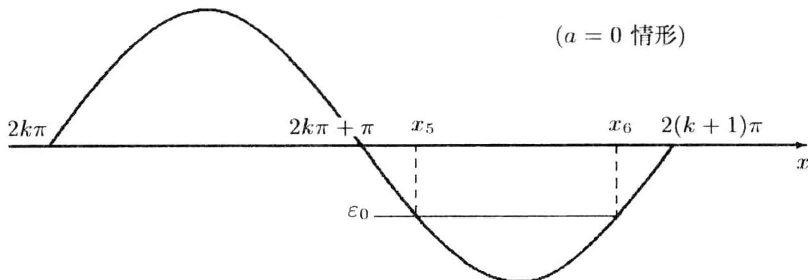


图 6.1.2

证明 取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 对 $\forall\, k \in \mathbb{Z}^+$, 由 $\left[2k\pi + \dfrac{\pi}{4}, 2k\pi + \dfrac{3}{4}\pi\right]$ 和 $\left[2k\pi + \dfrac{5}{4}\pi, 2k\pi + \dfrac{7}{4}\pi\right]$ 的长度均为 $\dfrac{\pi}{2}$ 可知, 存在 n_k', $n_k'' \in \mathbb{Z}^+$, 使得

$$2k\pi + \frac{\pi}{4} \leqslant n_k' \leqslant 2k\pi + \frac{3}{4}\pi, \quad 2k\pi + \frac{5}{4}\pi \leqslant n_k'' \leqslant 2k\pi + \frac{7}{4}\pi.$$

令

$$n_k = \begin{cases} n_k', & a < 0, \\ n_k'', & a \geqslant 0, \end{cases}$$

则 $n_k > k$, 于是 $n_k \to +\infty\ (k \to \infty)$, 且

$$|\sin n_k - a| = |\sin n_k| + |a| \geqslant \varepsilon_0,$$

即 $\{\sin n\}$ 不收敛于 a.

6.1.3 变量趋于无穷大的情形

变量趋于 ∞(或 $\pm\infty$) 时，虽不认为它有极限，但由于它有明确的变化趋势，因此在某些场合是有用的．此时记为 $\lim X=\infty$．当变量 X 的过程具体给定之后，这种记法就有了确切的含义．例如，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ 叙述为：

对 $\forall M>0$, 存在 $N\in\mathbb{Z}^+$, 当 $n>N$ 时，有

$$|x_n|>M.$$

类似地，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ 叙述为：

对 $\forall M>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$f(x)>M.$$

如果变量不趋于 ∞(或 $\pm\infty$), 则同样可以准确叙述．例如，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq+\infty$ 叙述为：

存在 $M_0>0$, 对 $\forall N\in\mathbb{Z}^+$, 存在 $n'\in\mathbb{Z}^+$, 使得 $n'>N$, 且

$$x_{n'}\leqslant M_0.$$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq-\infty$ 叙述为：

存在 $M_0>0$, 对 $\forall\delta>0$, 存在 x', 使得 $0<|x'-x_0|<\delta$, 且

$$f(x')\geqslant-M_0.$$

例 6.1.2 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续且无界，求证：存在 $x_n\in(a,b)$ $(n=1,2,\cdots)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$.

证明 对 $\forall n\in\mathbb{Z}^+$, 由 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上无界可知，存在 $x_n\in[a,b)$, 使得

$$|f(x_n)|>n,$$

于是取 $n=1,2,\cdots$, 我们可得到一点列 $\{x_n\}\subset[a,b)$. 根据聚点原理可知，存在 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得

$$|f(x_{n_k})|>n_k.$$

设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$, 则由 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续可知，$x_0\notin[a,b)$, 从而 $x_0=b$.

又因为 $n_k\to+\infty$ $(k\to\infty)$, 所以

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\infty.$$

习题 6.1

6.1.1 用 $\varepsilon - N$ 语言证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0.$

6.1.2 用 $\varepsilon - \delta$ 语言证明: 如果 $f(x)\in R[0,1]$, 且 $f(0^+)$ 存在, 则

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=f(0^+).$$

6.1.3 用 $\varepsilon - \delta$ 或 $\varepsilon - X$ 语言描述下列各式:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq A$; (2) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\infty$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq A$; (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq\infty$.

6.1.4 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$, 求证 $f(x)\equiv l$.

6.1.5 用 $\varepsilon - N$ 语言证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{n}\neq 0$.

6.1.6 设 $f(x)\in C[a,+\infty)$, 且 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上无界, 求证: 存在点列 $\{x_n\}$, 满足

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty.$$

6.1.7 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均为单调减少的非负数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$. 令

$$N_1(m)=\min\left\{N\;\middle|\;N\in\mathbb{Z}^+,\ \text{当 } n>N \text{ 时},\ a_n<\frac{1}{m}\right\},$$
$$N_2(m)=\min\left\{N\;\middle|\;N\in\mathbb{Z}^+,\ \text{当 } n>N \text{ 时},\ b_n<\frac{1}{m}\right\}\quad(m=1,2,\cdots).$$

求证: 如果 $\{N_1(m)\}$ 与 $\{N_2(m)\}$ 均为严格单调的, 则

$$\lim_{m\to\infty}[N_2(m)-N_1(m)]=+\infty.$$

6.1.8 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(k)}=\infty\ (k=1,2,\cdots)$, 求证

$$\lim_{n\to\infty}(x_n^{(1)}x_n^{(2)}\cdots x_n^{(N)})=\infty.$$

另外求证, 如果式中因子个数是无穷多时, 结论是否正确?

6.2 关于极限的存在性

极限的存在性是极限理论中的基本问题. 数学分析中的许多问题都与之相关. 例如, 函数的连续性、可微性、可积性、级数与广义积分的收敛性等都归结为极限的存在问题. 本节我们将通过典型例题来介绍一些解决此类问题的常用方法和技巧. 由于涉及极限存在性的问题种类繁多, 无法面面俱到. 所以对于同类书中常见的一些问题我们大多没有选入, 而选择了一些在方法和技巧上带有普遍性和启发性的例题. 希望读者能从中得到启发.

为了叙述中便于引证，我们将与极限存在性有关的定理或命题列在下面.

定理 6.2.1 (两边夹原理)

设变量 X, Y, Z 满足 $Y \leqslant X \leqslant Z$, 且 $\lim Y = \lim Z = a$, 则 $\lim X = a$, 其中 X, Y, Z 可以代表数列，也可以代表同一过程中的函数.

(注意：当 $\lim Y \neq \lim Z$ 时，$\lim X$ 不一定存在.)

定理 6.2.2 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是：$\{x_n\}$ 的任何子列 $\{x_{n_k}\}$ 均收敛. 与此等价的是：若 $\{x_n\}$ 有两个子列 $\{x_{n_k}\}$ 和 $\{x_{n_{k'}}\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \neq \lim\limits_{k'} x_{n_{k'}}$ 或有一个不收敛，则 $\{x_n\}$ 发散.

定理 6.2.3 (Heine 定理)

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是：对 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 中任意以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都存在. 当 $x_0 = \infty$ 时此结论也成立.

定理 6.2.4 (单调有界原理)

任何单调有界变量必有极限. 这一原理的具体表现有：

(1) 如果 $\{x_n\}$ 为单调增加 (或单调减少) 且上方 (或下方) 有界，则 $\{x_n\}$ 必有极限；

(2) 如果 $f(x)$ 在 x_0 的右 (左) 侧单调有界，则 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\right)$ 存在.

定理 6.2.5 (聚点原理)

任何有界无穷点集必有聚点.

定理 6.2.6 任何有界数列必有收敛子列.

定理 6.2.7 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在的充分必要条件是

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

此结论对 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$ 的情形也成立.

定理 6.2.8 (Cauchy 收敛原理)

(1) (数列情形) 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时，对一切 $p \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon.$$

(2) (函数情形) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是：对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x' - x_0| < \delta$, $0 < |x'' - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

对其他过程的函数极限的 Cauchy 收敛原理也有相应的表达形式.

例 6.2.1 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上以 e 为最小正周期的连续函数，求证：

(1) $f(0)$ 为数列 $\{f(n)\}$ 的某一子列 $\{f(n_k)\}$ 的极限点；

(2) 对 $\forall\, n_0\in\mathbb{Z}^+$, $f(n_0)$ 为数列 $\{f(n)\}$ 的某一子列 $\{f(n_k)\}$ 的极限点.

分析 (1) 只需证明：对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $n\in\mathbb{Z}^+$, 满足

$$|f(n)-f(0)|<\varepsilon.$$

由 $f(x)$ 的连续性，存在 $\delta>0$, 当 $|x-0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(0)|<\varepsilon.$$

要在 $(-\delta,\delta)$ 上找 n 是不现实的，但可以考虑在形如 $(m\mathrm{e}-\delta,m\mathrm{e}+\delta)$ $(m=1,2,\cdots)$ 的区间上去找. 因为

$$\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\frac{\theta_k}{(k+1)!}\quad(0<\theta_k<1),$$

所以 $k!\mathrm{e}=[k!\mathrm{e}]+\dfrac{\theta_k}{k+1}$, 只要 $\dfrac{\theta_k}{k+1}<\delta$, 那么 $[k!\mathrm{e}]$ 便满足了要求.

至于 (2), 我们可以借助辅助函数来证明.

证明 (1) 由 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可知，对 $\forall\,k\in\mathbb{Z}^+$, 存在 $\delta_k>0$, 当 $|x-0|<\delta_k$ 时，有

$$|f(x)-f(0)|<\frac{1}{k}.$$

取 $m=m(k)\in\mathbb{Z}^+$, 且 $m>\dfrac{1}{\delta_k}$, 并记 $n_k=[m!\mathrm{e}]$, 则由

$$\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!}+\frac{\theta_m}{(m+1)!}\quad(0<\theta_m<1)$$

可知， $m!\mathrm{e}=[m!\mathrm{e}]+\dfrac{\theta_m}{m+1}=n_k+\dfrac{\theta_m}{m+1}$, 于是由 $\dfrac{\theta_m}{m+1}<\delta_k$ 可得

$$|f(n_k)-f(0)|=\left|f\left(m!\mathrm{e}-\frac{\theta_m}{m+1}\right)-f(0)\right|=\left|f\left(-\frac{\theta_m}{m+1}\right)-f(0)\right|<\frac{1}{k},$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}f(n_k)=f(0)$.

(2) 对 $\forall\,n_0\in\mathbb{Z}^+$, 作辅助函数

$$g(x)=f(x+n_0)\quad(-\infty<x<+\infty),$$

则 $g(x)$ 也是以 e 为周期的连续函数，于是由 (1) 可知， $g(0)$ 为 $\{g(n)\}$ 某一子列 $\{g(n_k)\}$ 的极限点. 注意到 $g(0)=f(n_0)$, 且 $\{g(n)\}\subset\{f(n)\}$, 故 $f(n_0)$ 为 $\{f(n)\}$ 某一子列 $\{f(n_k)\}$ 的极限点.

证明数列的极限存在，通常有以下几种思路：

(1) 直接用极限定义 (常常已知极限值);

(2) 利用两边夹原理;

(3) 利用单调有界原理;

(4) 利用 Cauchy 收敛原理;

(5) 利用上、下极限相等;

(6) 任何收敛子列极限值均相等 (有界数列), 或收敛数列的任何子列都收敛.

有些问题还需借助反证法来完成. 对一个具体问题来说，究竟采用哪种思路，可根据问题的特点及所给条件加以选择.

例 6.2.2 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上严格单调，$x_n \in [a,b]$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$, 求证：如果 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 也存在.

证明 反证法. 如果 $\{x_n\}$ 不收敛，则存在子列 $\{x'_{n_k}\}$ 和 $\{x''_{n_k}\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} x'_{n_k} = x' < x'' = \lim_{k\to\infty} x''_{n_k}.$$

选取 c_1, $c_2 \in [a,b]$, 满足 $x' < c_1 < c_2 < x''$, 则由极限的保号性可知，存在 $K \in \mathbb{Z}^+$, 当 $k > K$ 时，有

$$x'_{n_k} < c_1 < c_2 < x''_{n_k}.$$

设 $f(x)$ 单调增加 (减少时同理), 则当 $k > K$ 时，有

$$f(x'_{n_k}) < f(c_1) < f(c_2) < f(x''_{n_k}),$$

于是

$$\lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) \leqslant f(c_1) < f(c_2) \leqslant \lim_{k\to\infty} f(x''_{n_k}).$$

这与 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在矛盾，此矛盾说明 $\{x_n\}$ 的任何收敛子列极限值相等，于是由定理 6.2.2 及定理 6.2.6 可知，$\{x_n\}$ 收敛.

例 6.2.3 设 $\{a_n\}$ 为有界数列，满足 $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{2n} - pa_n) = 0$ $(p > 1)$, 求证

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

证明 方法一：证明 $\{a_n\}$ 的每个收敛子列的极限值为 0.

设 $\{a_{n_k}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的任一收敛子列，其极限值为 a, 则由

$$\lim_{k\to\infty} (a_{2n_k} - pa_{n_k}) = 0$$

可知,

$$\lim_{k\to\infty} a_{2n_k} = \lim_{k\to\infty} [(a_{2n_k} - pa_{n_k}) + pa_{n_k}] = pa.$$

同理有

$$\lim_{k\to\infty} a_{4n_k} = p^2 a,\quad \lim_{k\to\infty} a_{8n_k} = p^3 a,\quad \cdots,\quad \lim_{k\to\infty} a_{2^m n_k} = p^m a,\quad \cdots.$$

综上可知，对 $\forall\, m \in \mathbb{Z}^+, p^m a$ 为 $\{a_n\}$ 的极限点，并由 $\{a_n\}$ 有界可知， $\{p^m a\}$ 有界，于是由 $\lim\limits_{m\to\infty} p^m = +\infty$ 可知， $a = 0$. 由 $\{a_{n_k}\}$ 的任意性可知，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

方法二：利用叠加的方法.

对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n} - pa_n) = 0$ 可知，存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时，有

$$-\varepsilon < a_{2n} - pa_n < \varepsilon,$$

故对 $\forall\, m \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$\begin{gathered} -\varepsilon < a_{2n} - pa_n < \varepsilon, \\ -\varepsilon < a_{4n} - pa_{2n} < \varepsilon, \\ \cdots, \\ -\varepsilon < a_{2^m n} - pa_{2^{m-1} n} < \varepsilon, \end{gathered}$$

从而有

$$\begin{gathered} -\varepsilon p^{m-1} < p^{m-1} a_{2n} - p^m a_n < p^{m-1}\varepsilon, \\ -\varepsilon p^{m-2} < p^{m-2} a_{4n} - p^{m-1} a_{2n} < p^{m-2}\varepsilon, \\ \cdots, \\ -\varepsilon p < pa_{2^{m-1} n} - p^2 a_{2^{m-2} n} < p\varepsilon, \\ -\varepsilon < a_{2^m n} - pa_{2^{m-1} n} < \varepsilon. \end{gathered}$$

叠加上述不等式，整理得

$$-\frac{\varepsilon}{p-1}\cdot\frac{p^m - 1}{p^m} < \frac{a_{2^m n}}{p^m} - a_n < \frac{\varepsilon}{p-1}\cdot\frac{p^m - 1}{p^m}\quad (m = 1, 2, \cdots).$$

因 $p > 1$, 而 $\{a_n\}$ 有界，所以对上式令 $m \to \infty$, 得

$$-\frac{\varepsilon}{p-1} \leqslant a_n \leqslant \frac{\varepsilon}{p-1}\quad (n > N).$$

综上可知，对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时，有

$$|a_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{p-1},$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

方法三：利用 Cauchy 收敛原理.

由 $\{a_n\}$ 有界可知，存在 $M>0$, 使得

$$\sup_{n\geqslant 1}\{|a_n|\}\leqslant M.$$

另一方面，对 $\forall\,\varepsilon>0$, 由 $p>1$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n}-pa_n)=0$ 可知，存在 $N\in\mathbb{Z}^+$, 使得当 $k>N$ 时，同时满足

$$\frac{M}{p^k}<\frac{\varepsilon}{2},\quad |a_{2n}-pa_n|<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是对一切 $m,\ n>N$, 有

$$\begin{aligned}|a_m-a_n|&=\frac{1}{p}|pa_m-pa_n|\\&\leqslant\frac{1}{p}|a_{2m}-pa_m|+\frac{1}{p}|a_{2n}-pa_n|+\frac{1}{p}|a_{2m}-a_{2n}|\\&<\frac{\varepsilon}{p}+\frac{1}{p}|a_{2m}-a_{2n}|.\end{aligned}$$

反复运用上述不等式可知，对一切 $m,\ n>N$, 有

$$\begin{aligned}|a_m-a_n|&\leqslant\frac{\varepsilon}{p}+\frac{\varepsilon}{p^2}+\cdots+\frac{\varepsilon}{p^{k-1}}+\frac{1}{p^k}|a_{2^km}-a_{2^kn}|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{p}+\frac{\varepsilon}{p^2}+\cdots+\frac{\varepsilon}{p^k}+\frac{2M}{p^k}\\&\leqslant\varepsilon+\frac{\varepsilon}{p}+\frac{\varepsilon}{p^2}+\cdots+\frac{\varepsilon}{p^k}<\frac{p}{p-1}\varepsilon+\varepsilon,\end{aligned}$$

故 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列，从而 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(a_{2n}-pa_n)=a-pa=0,$$

于是由 $p>1$ 可得 $a=0$.

方法四：利用两边夹原理.

设 $b_n=-(a_{2n}-pa_n)\ (n\in\mathbb{Z}^+)$, 则 $a_n=\dfrac{a_{2n}+b_n}{p}$, 并对 $\forall\,n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$|a_n|=\left|\frac{a_{2n}+b_n}{p}\right|\leqslant\frac{1}{p}|b_n|+\frac{1}{p}|a_{2n}|,$$

于是每一个固定的 $n\in\mathbb{Z}^+$ 及 $\forall\,m\in\mathbb{Z}^+$, 反复运用上面的不等式可得

$$\begin{aligned}|a_n|&\leqslant\frac{1}{p}|b_n|+\frac{|b_{2n}|}{p^2}+\cdots+\frac{|b_{2^{m-2}n}|}{p^{m-1}}+\frac{|a_{2^mn}|}{p^m}\\&\leqslant\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{p^k}\cdot\sup_{k\geqslant n}\{|b_k|\}+\frac{1}{p^m}\cdot\sup_{k\geqslant n}\{|a_k|\}.\end{aligned}$$

在上式中，令 $m \to +\infty$, 并由 $\{a_n\}$ 有界可得

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{p-1} \sup_{k \geqslant n}\{|b_k|\},$$

故由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ 可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| \leqslant \frac{1}{p-1} \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geqslant n}\{|b_k|\} = 0,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

方法五：证明 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

根据上、下极限的性质可得

$$\begin{aligned}
0 &= \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_{2n} - pa_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_{2n} + \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(-pa_n) \\
&= \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_{2n} - p\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leqslant (1-p)\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n, \\
0 &= \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_{2n} - pa_n) \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_{2n} + \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(-pa_n) \\
&= \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_{2n} - p\,\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \geqslant (1-p)\,\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n,
\end{aligned}$$

所以由 $p > 1$ 可知,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leqslant 0 \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n,$$

从而 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

方法六：证明 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, |a_n| = 0$.

对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n} - pa_n) = 0$ 可知，存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时，有

$$|a_{2n} - pa_n| < \varepsilon,$$

于是当 $n > N$ 时，有

$$p|a_n| \leqslant \varepsilon + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, |a_{2n}| \leqslant \varepsilon + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, |a_n|.$$

对上式取上极限得

$$p\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |a_n| \leqslant \varepsilon + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, |a_2 n| \leqslant \varepsilon + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, |a_n|,$$

从而

$$0 \leqslant (p-1)\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |a_n| \leqslant \varepsilon.$$

由 ε 逼迫原理知， $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, |a_n| = 0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

从例 6.2.3 的证明可以看到，当我们证明某个问题时可能有多种途径，着眼点不同，证明的思路和处理方法也就不同，所以不妨多种方法都试一试.

在前面的例子中多次用到了有界数列收敛的充分必要条件是任何收敛子列的极限值都相等这一命题. 注意该命题与定理 6.2.2 的差别. 在使用该命题时，一定要先保证数列是有界的，否则将导出错误的结果.

利用单调有界原理证明极限的存在性是很常用的方法，对于给定的问题来说，是否应使用单调有界原理还是比较容易做出判断的，比如：由递推关系定义的一些保号数列，通常都能利用这个原理.

例 6.2.4 设 $x_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$ $(n\in\mathbb{Z}^+)$, 求证 $\{x_n\}$ 收敛.

证明 显然 $\{x_n\}$ 是单调增加的，并且对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 由 $2^{2^n}>n$ 可得

$$\begin{aligned}x_n&=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}\\&<\sqrt{2^2+\sqrt{2^{2^2}+\cdots+\sqrt{2^{2^n}}}}=2\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}_{n\text{ 重根号}}=2b_n,\end{aligned}$$

故由 $b_1=1$, $b_n=\sqrt{1+b_{n-1}}$ $(n=2,3,\cdots)$ 可推知， $b_n<2$, 从而对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$0<x_n<2b_n<4.$$

综上可知， $\{x_n\}$ 是单调有界数列，从而 $\{x_n\}$ 收敛.

例 6.2.5 设 $0<x_0<x_1$, $x_{n+1}=\dfrac{x_n+x_{n-1}}{2}$ $(n\in\mathbb{Z}^+)$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

分析 这是一个由算术平均值定义出来的数列. 在实轴上画出几个点来，这个数列的规律就看得非常清楚了 (图 6.2.1). 首先， $\{x_n\}$ 并不单调，那么是否放弃运用单调有界原理呢？再仔细地观察一下，就会发现偶数项 $\{x_{2n}\}$ 单调增加，而奇数项 $\{x_{2n+1}\}$ 单调减少，而有界性是显而易见的，于是问题就能解决了.

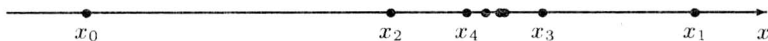


图 6.2.1

证明 显然有 $x_0<x_1$, $x_2<x_3$. 假设 $x_{2(n-1)}<x_{2n-1}$ $(n\geqslant 2)$ 成立，则

$$\begin{aligned}x_{2n+1}-x_{2n}&=\frac{x_{2n-1}+x_{2n}}{2}-x_{2n}=\frac{x_{2n-1}-x_{2n}}{2}\\&=\frac{1}{2}\Big(x_{2n-1}-\frac{x_{2n-1}+x_{2n-2}}{2}\Big)=\frac{1}{4}\Big(x_{2n-1}-x_{2n-2}\Big)>0,\end{aligned}$$

故由归纳法可推知，对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有 $x_{2n}<x_{2n+1}$, 于是由

$$x_{2n+2}=\frac{x_{2n+1}+x_{2n}}{2}>x_{2n}$$

可知，$\{x_{2n}\}$ 单调增加；由

$$x_{2n+1}=\frac{x_{2n}+x_{2n-1}}{2}<\frac{x_{2n+1}+x_{2n-1}}{2}$$

可知，$x_{2n+1}<x_{2n-1}$, 即 $\{x_{2n+1}\}$ 单调减少. 又由

$$x_0<x_{2n}<x_{2n+1}<x_1 \quad (n=1,2,\cdots)$$

可知，$\{x_n\}$ 为有界数列，所以 $\{x_{2n}\}$ 与 $\{x_{2n+1}\}$ 均收敛，并由

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n+1}=\frac{1}{2}\Big(\lim_{n\to\infty}x_{2n}+\lim_{n\to\infty}x_{2n-1}\Big)$$

可知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}$, 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

注 此题也可用区间套定理证得.

例 6.2.6 设 $A>0$, $x_1>0$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\Big(x_n+\dfrac{A}{x_n}\Big)$ $(n\in\mathbb{Z}^+)$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

分析 如果先假定 $\{x_n\}$ 收敛，则由 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\Big(x_n+\dfrac{A}{x_n}\Big)$ 可得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{A}$$

(这一点很重要，它可以提示我们寻找 $\{x_n\}$ 的上界或下界). 又由

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{A-x_n^2}{x_n} \quad (n=1,2,\cdots)$$

可知，数列 $\{x_n\}$ 是否单调完全取决于 $x_n\geqslant\sqrt{A}$ 还是 $x_n\leqslant\sqrt{A}$. 为此我们可先观察一下前几项

$$x_2-x_1=\frac{1}{2}\frac{A-x_1^2}{x_1},\quad x_3-x_2=\frac{1}{2}\frac{A-x_2^2}{x_2},$$

如果 $x_1\geqslant\sqrt{A}$, 则 $x_2\leqslant x_1$. 但要想 $x_3\leqslant x_2$, 还需 $x_2\geqslant\sqrt{A}$, 即

$$\frac{1}{2}\Big(x_1+\frac{A}{x_1}\Big)\geqslant\sqrt{A},$$

这是能办到的. 因为 $x_1\geqslant\sqrt{A}$, 而函数 $y=\dfrac{1}{2}\Big(x+\dfrac{A}{x}\Big)$ 在区间 $[\sqrt{A},+\infty)$ 上是单调增加的.

证明 不妨设 $x_1\geqslant\sqrt{A}$ (当 $x_1<\sqrt{A}$ 时证明完全类似). 设

$$f(x)=\frac{1}{2}\Big(x+\frac{A}{x}\Big) \quad (\sqrt{A}\leqslant x<+\infty),$$

则由 $f'(x)=\dfrac{1}{2}\Big(1-\dfrac{A}{x^2}\Big)$ 可知，$f(x)$ 在 $[\sqrt{A},+\infty)$ 内是单调增加的，于是

$$x_2=\frac{1}{2}\Big(x_1+\frac{A}{x_1}\Big)=f(x_1)\geqslant f(\sqrt{A})=\frac{1}{2}\Big(\sqrt{A}+\frac{A}{\sqrt{A}}\Big)=\sqrt{A}.$$

假设 $x_n\geqslant\sqrt{A}$, 则由 $f(x)$ 单调增加可得

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\Big(x_n+\frac{A}{x_n}\Big)=f(x_n)\geqslant f(\sqrt{A})=\frac{1}{2}\Big(\sqrt{A}+\frac{A}{\sqrt{A}}\Big)=\sqrt{A},$$

于是由归纳法可知,

$$x_n\geqslant\sqrt{A}\quad(n=1,2,\cdots).$$

另一方面，由

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{A-x_n^2}{x_n}\leqslant 0\quad(n=1,2,\cdots)$$

可知，$\{x_n\}$ 是单调减少的，故由单调有界原理可知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且不等于零，于是由 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\Big(x_n+\dfrac{A}{x_n}\Big)$ 可得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{A}.$$

注 如利用不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\dfrac{1}{2}(a+b)$ $(a,\ b\geqslant 0)$ 可直接证得

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\Big(x_n+\frac{A}{x_n}\Big)\geqslant\sqrt{A}.$$

例 6.2.7 设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{k^2+1}-\ln n$ $(n=1,2,\cdots)$, 求证 $\{x_n\}$ 收敛.

证明 对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 由不等式

$$\frac{1}{n+1}<\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)=\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$$

可得

$$\begin{aligned}x_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\sum_{k=1}^{n-1}[\ln(k+1)-\ln k]\\&\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}\Big[\frac{k}{k^2+1}-\ln\Big(1+\frac{1}{k}\Big)\Big]\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{k}{k^2+1}-\frac{1}{k}\Big)\\&=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k^2+1)}\geqslant-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}=-\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Big)>-1,\end{aligned}$$

并由

$$x_{n+1}-x_n=\frac{n+1}{(n+1)^2+1}-\ln(n+1)+\ln n<\frac{1}{n+1}-\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)<0$$

可知，$\{x_n\}$ 为单调减少且有下界，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

例 6.2.8 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有定义，且 $f(x)>0$, 求证：

(1) 如果 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x)}{f(y)}=1$;

(2) 如果 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x)}{f(y)}=1$, 则极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在且不为零.

分析 结论 (1) 是不难看出的. 因为当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$f(x)$ 与 $f(y)$ 都与同一个非零数无限接近. 因此，它们的比值 $\dfrac{f(x)}{f(y)}$ 就趋近于 1.

现在来分析一下结论 (2). 条件 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x)}{f(y)}=1$ 意味着什么呢？由二重极限的定义可知，对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{f(x)}{f(y)}-1\right|<\varepsilon.$$

变形之后就是

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon|f(y)|.$$

因此，只要 $f(x)$ 有界，问题就可根据 Cauchy 收敛原理获得解决.

证明 (1) 对 $\forall\,\varepsilon\in(0,1)$, 由 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续及 $f(0)>0$ 可知，存在 $\delta>0$, 当 $|x|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(0)|<\frac{\varepsilon f(0)}{4},\quad |f(x)|>\frac{f(0)}{2}.$$

由此可知，对 $\forall\,x,\ y\in(-1,1)$, 当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$, 有 $|x|<\delta$, $|y|<\delta$, 从而

$$\left|\frac{f(x)}{f(y)}-1\right|=\frac{|f(x)-f(y)|}{f(y)}\leqslant\frac{2}{f(0)}[|f(x)-f(0)|+|f(y)-f(0)|]<\varepsilon.$$

根据二重极限的定义可知，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x)}{f(y)}=1$.

(2) 由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x)}{f(y)}=1$ 及 $f(x)>0$, $f(y)>0$ 可知,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(y)}{f(x)}=1,$$

故二元函数 $\dfrac{f(y)}{f(x)}$ 在点 $(0,0)$ 的某一矩形邻域内有界，即存在 $M>0$ 及 $\delta_1>0$, 使得当 $|x|<\delta_1$, $|y|<\delta_1$ 时，有

$$\left|\frac{f(y)}{f(x)}\right|\leqslant M,$$

于是存在 $x_1\in(-\delta_1,\delta_1)$, 使得对 $\forall\,y\in(-\delta_1,\delta_1)$, 有

$$0<f(y)\leqslant Mf(x_1).$$

另一方面，对 $\forall\,\varepsilon>0$, 由条件及二重极限的定义可知，存在 $\delta>0$, 使得 $\delta<\delta_1$, 且当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{2}\delta$ 时，有

$$\left|\frac{f(x)}{f(y)}-1\right|<\frac{\varepsilon}{Mf(x_1)},$$

故当 $0<|x|<\delta$, $0<|y|<\delta$ 时，有 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{2}\delta$, 从而

$$|f(x)-f(y)|=f(y)\left|\frac{f(x)}{f(y)}-1\right|<f(y)\frac{\varepsilon}{Mf(x_1)}\leqslant\varepsilon.$$

由此可知，当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 满足 Cauchy 收敛原理，于是 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，并根据累次极限与二重极限的关系可知，$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{f(y)}$ 存在，且

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f(y)}=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{f(x)}{f(y)}=1.$$

由此可推得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq 0$.

例 6.2.9 设 x_0, x_1 为任意两个实数，定义数列

$$x_{n+1}=\lambda_n x_n+(1-\lambda_n)x_{n-1}\quad(n=1,2,\cdots),$$

其中 $\{\lambda_n\}$ 为某已知数列，满足 $0<\lambda_n<1$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=1$, 求证 $\{x_n\}$ 收敛.

证明 对 $\forall\,n\in\mathbb{Z}^+$, 由

$$|x_{n+1}|\leqslant\lambda_n|x_n|+(1-\lambda_n)|x_{n-1}|\leqslant\max\{|x_n|,|x_{n-1}|\}$$

可推知,

$$|x_{n+1}|\leqslant\max\{|x_n|,|x_{n-1}|\}\leqslant\max\{|x_{n-1}|,|x_{n-2}|\}\leqslant\max\{|x_1|,|x_0|\}.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=1$ 可知，存在 $N_1\in\mathbb{Z}^+$, 使得当 $n>N_1$ 时，有 $\lambda_n>\dfrac{1}{2}$, 且

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-x_n|&=|\lambda_n x_n+(1-\lambda_n)x_{n-1}-x_n|\\&=(1-\lambda_n)|x_n-x_{n-1}|<\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|,\end{aligned}$$

于是当 $n>N_1$ 时，对 $\forall\,p\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\\&\leqslant\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{p-1}}\right)|x_{n+1}-x_n|\\&\leqslant 2|x_{n+1}-x_n|<|x_n-x_{n-1}|<\frac{1}{2}|x_{n-1}-x_{n-2}|\\&<\frac{1}{2^{n-(N_1+1)}}|x_{N_1+1}-x_{N_1}|<\frac{\max\{|x_1|,|x_0|\}}{2^{n-N_1-1}}.\end{aligned}$$

综上可知，对 $\forall\,\varepsilon>0$ 及上述的 N_1, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\max\{|x_1|,|x_0|\}}{2^{n-N_1-1}}=0$ 可知，存在 $N\in\mathbb{Z}^+$, 使得 $N>N_1$, 且当 $n>N$ 时，有

$$\frac{\max\{|x_1|,|x_0|\}}{2^{n-N_1-1}}<\varepsilon,$$

于是当 $n>N$ 时，对 $\forall\,p\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$|x_{n+p}-x_n|<\frac{\max\{|x_1|,|x_0|\}}{2^{n-N_1-1}}<\varepsilon.$$

根据 Cauchy 收敛原理可知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

例 6.2.10 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，且对 $\forall x\geqslant 0$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x+n)=0$, 求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

分析 根据 Cauchy 收敛原理，只需证明：对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $A>1$, 当 x', $x''>A$ 时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

考虑到极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x+n)=0$ 中变量的特殊形式，很自然地想到把 x', x'' 表示成

$$x'=[x']+(x'),\ x''=[x'']+(x''),$$

这样便有

$$|f(x')-f(x'')|=|f([x']+(x'))-f([x'']+(x''))|.$$

这里切勿认为 $\lim\limits_{x'\to+\infty}f([x']+(x'))=\lim\limits_{x''\to+\infty}f([x'']+(x''))=0$, 原因是 (x') 与 (x'') 不是固定的．因此，我们希望找到固定的实数 (x_1), (x_2) 来“替换” (x') 与 (x''), 并且使不等式

$$\begin{aligned}|f(x')-f(x'')|\leqslant{}&|f([x']+(x'))-f([x']+(x_1))|+|f([x']+(x_1))|\\&+|f([x'']+(x''))-f([x'']+(x_2))|+|f([x'']+(x_2))|\end{aligned}$$

右端的各项都很小．要想使第一、第三两项很小，根据一致连续性，只需 (x') 与 (x_1), (x'') 与 (x_2) 都很接近．要想使第二、第四两项很小，只需 $[x']$ 与 $[x'']$ 都充分大．问题在于当 x', x'' 改变时，(x') 与 (x_1), (x'') 与 (x_2) 能否保证距离不增大？这是证明本例题的关键所在.

证明 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 由 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续可知，存在 $\delta>0$, 使得 $\delta<1$, 且当 x, $y\in[0,+\infty)$, $|x-y|\leqslant\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

令 $l=\left[\dfrac{1}{\delta}\right]+1$, $x_0=0$, $x_{l+1}=1$, $x_k=\dfrac{1}{2l}+\dfrac{k-1}{l}$ $(k=1,2,\cdots,l)$, 则由

$$\lim_{n\to\infty}f(x_k+n)=0\quad(k=0,1,2,\cdots,l+1)$$

可知，存在 $N\in\mathbb{Z}^+$, 当 $n\geqslant N$ 时，对每一个 x_k $(k=0,1,2,\cdots,l+1)$, 有

$$|f(x_k+n)|<\frac{\varepsilon}{4},$$

并由 $[0,1]=\bigcup\limits_{k=0}^{l}[x_k,x_{k+1}]$ 及

$$x_{l+1}-x_l=x_1-x_0=\frac{1}{2l}\leqslant\frac{\delta}{2},\quad x_{k+1}-x_k=\frac{1}{l}\leqslant\delta\quad(k=1,2,\cdots,l-1)$$

可知，对 $\forall\, x'$, $x''\in[0,1]$, 存在 $k_{x'}$, $k_{x''}$ $(0\leqslant k_{x'},\ k_{x''}\leqslant l)$, 使得

$$x_{k_{x'}}\leqslant x'\leqslant x_{k_{x'}+1},\qquad x_{k_{x''}}\leqslant x''\leqslant x_{k_{x''}+1}.$$

综上可知，对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{Z}^+$ 及 $\delta>0$, 并且对 $\forall\, x'$, $x''\in[N+1,+\infty)$, 存在 $k_{x'}$, $k_{x''}$ $(0\leqslant k_{x'},\ k_{x''}\leqslant l)$, 使得

$$|[x']+(x')-([x']+x_{k_{x'}})|\leqslant\delta,\quad |[x'']+(x'')-([x'']+x_{k_{x''}})|\leqslant\delta,$$

及

$$|f([x']+x_{k_{x'}})|+|f([x'']+x_{k_{x''}})|<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是当 x', $x''>N+1$ 时，有

$$\begin{aligned}|f(x')-f(x'')|\leqslant{}&|f([x']+(x'))-f([x']+(x_1))|+|f([x']+(x_1))|\\&+|f([x'']+(x''))-f([x'']+(x_2))|+|f([x'']+(x_2))|<\varepsilon.\end{aligned}$$

根据 Cauchy 收敛原理可知， $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

注 本题中，若将条件“ $f(x)$ 一致连续”换成“ $f(x)$ 连续”，结论不再成立. 考查函数

$$f(x)=\begin{cases}2^{n+1}(x-n), & n\leqslant x<n+\dfrac{1}{2^{n+1}},\\ -2^{n+1}\left(x-n-\dfrac{1}{2^n}\right), & n+\dfrac{1}{2^{n+1}}\leqslant x<n+\dfrac{1}{2^n},\\ 0, & n+\dfrac{1}{2^n}\leqslant x<n+1,\ (n=0,1,2,\cdots),\end{cases}$$

则由 $f(x)$ 的部分图像 (图 6.2.2) 可知， $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且对 $x\in[0,+\infty)$, 当 $x=[x]$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}f(n+x)=\lim_{n\to\infty}f(n+[x])=0\quad(n\in\mathbb{Z}^+),$$

当 $x \neq [x]$ 时，由 $0<(x)=x-[x]<1$ 可知，存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 使得当 $n>N$ 时，有

$$\frac{1}{2^n}<(x),$$

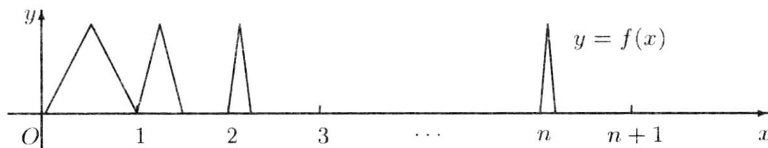


图 6.2.2

于是由 $n+[x]+\dfrac{1}{2^{n+[x]}}<n+[x]+(x)<n+[x]+1$ 可知，当 $n>N$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty} f(n+x)=\lim_{n\to\infty} f(n+[x]+(x))=0,$$

综上可知，对 $x\in[0,+\infty)$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n+x)=0$. 但由

$$\lim_{n\to+\infty} f(n)=0, \quad \lim_{n\to+\infty} f\left(n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)=1$$

可知，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在.

由于 Cauchy 收敛原理是极限存在的充分必要条件，从例 6.2.8 至例 6.2.10 中我们看到，对那些不易看出极限值的变量，常常可用 Cauchy 收敛原理来证明. 这就涉及很多估值问题 (参看第 3 章第 5 节).

利用上、下极限来证明极限存在是一个重要的方法，下面举几个这方面的例子. 为此，我们先来回顾一下有关上、下极限的一些基本性质. 为节省篇幅，叙述中没有区分数列与函数，统一用 X, Y, Z 等表示变量，并略去了极限过程.

性质 6.2.1 设 X, Y, Z 是 3 个变量 (同一个变化过程中), 下列结论成立:

(1) $\underline{\lim}\, X \leqslant \overline{\lim}\, X$, $\overline{\lim}(-X)=-\underline{\lim}\, X$, $\underline{\lim}(-X)=-\overline{\lim}\, X$;

(2) 如果 $X\leqslant Y$, 则 $\underline{\lim}\, X\leqslant \underline{\lim}\, Y$, $\overline{\lim}\, X\leqslant\overline{\lim}\, Y$;

(3) 如果 $X>0$, 则 $\overline{\lim}\,\dfrac{1}{X}=\dfrac{1}{\underline{\lim}\, X}$;

(4) $$\underline{\lim}\, X+\underline{\lim}\, Y\leqslant\underline{\lim}(X+Y)\leqslant\begin{cases}\underline{\lim}\, X+\overline{\lim}\, Y\\ \overline{\lim}\, X+\underline{\lim}\, Y\end{cases}\leqslant\overline{\lim}(X+Y)\leqslant\overline{\lim}\, X+\overline{\lim}\, Y;$$

(5) 如果 $X>0$, $Y>0$, 且均有界，则

$$\underline{\lim}\, X\cdot\underline{\lim}\, Y\leqslant\underline{\lim}\, XY\leqslant\begin{cases}\underline{\lim}\, X\cdot\overline{\lim}\, Y\\ \overline{\lim}\, X\cdot\underline{\lim}\, Y\end{cases}\leqslant\overline{\lim}\, XY\leqslant\overline{\lim}\, X\cdot\overline{\lim}\, Y;$$

(6) 如果 $\lim X$ 存在，则

$$\overline{\lim}(X+Y)=\lim X+\overline{\lim}\,Y,\quad \underline{\lim}(X+Y)=\lim X+\underline{\lim}\,Y;$$

(7) 如果 $X\geqslant 0$, 则 $\overline{\lim}\,X^2=(\overline{\lim}\,X)^2$, $\underline{\lim}\,X^2=(\underline{\lim}\,X)^2$;

(8) 如果 $\lim X$ 存在，且 $X\geqslant 0$, 则

$$\overline{\lim}(XY)=\lim X\cdot\overline{\lim}\,Y,\quad \underline{\lim}(XY)=\lim X\cdot\underline{\lim}\,Y.$$

性质 6.2.2 设 $\{x_n\}$ 为一数列，则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n=a$ (a 为有限数) 的充分必要条件是：存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=a,$$

并且对 $\{x_n\}$ 的任意收敛的子列 $\{x'_{n_k}\}$, 有

$$\lim_{k\to\infty}x'_{n_k}\leqslant a.$$

对于 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n=b$ (b 为有限数) 也有类似性质.

例 6.2.11 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都是数列，并且 $b_n=a_n+qa_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$, 其中 $q\geqslant 0$, $q\neq 1$. 求证 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\{b_n\}$ 收敛.

证明 必要性是显然的，下面证充分性.

事实上，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在，则由上、下极限的性质可得

$$\begin{aligned}
\underline{\lim_{n\to\infty}}\,b_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n+qa_{n+1})&\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n+q\,\underline{\lim_{n\to\infty}}\,a_{n+1}\\
&\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n+qa_{n+1})=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,b_n,\\
\underline{\lim_{n\to\infty}}\,b_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n+qa_{n+1})&\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n+q\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_{n+1}\\
&\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n+qa_{n+1})=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,b_n,
\end{aligned}$$

故由 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,b_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,b_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 及上面的不等式可推出

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n+q\,\underline{\lim_{n\to\infty}}\,a_{n+1}=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n+q\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_{n+1},$$

从而由 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_{n+1}=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n$ 及 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_{n+1}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n$ 可得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

例 6.2.12 设 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都是非负项数列，且

$$y_n = \underbrace{\sqrt{x_n + \sqrt{x_{n-1} + \cdots + \sqrt{x_1}}}}_{n\text{ 重根号}} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

求证 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\{y_n\}$ 收敛.

分析 例 6.2.12 与例 6.2.11 在题型上属于用递推关系式定义数列的问题. 参考前面的例子似乎应选择用单调有界原理来证明. 不过试一试就会发现不便利用单调有界原理. 下面我们用上、下极限来证明.

由题设可得 $y_n^2 = x_n + y_{n-1}$, 因此, 本例题的充分性是显然的. 现考虑必要性, 即已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 也存在. 自然想到在等式 $y_n^2 = x_n + y_{n-1}$ 的左右两端同时取上、下极限.

证明 充分性：对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > 1$ 时，由

$$y_n = \sqrt{x_n + \sqrt{x_{n-1} + \cdots + \sqrt{x_1}}} = \sqrt{x_n + y_{n-1}}$$

可知， $y_n^2 = x_n + y_{n-1}$, 从而

$$x_n = y_n^2 - y_{n-1}.$$

由此可知，当 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在时， $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 也存在，且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n(\lim_{n\to\infty} y_n - 1).$$

必要性：设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，则由 $x_n \geqslant 0$ 可知，存在 $a \in [0, +\infty)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

于是由 $y_n^2 = x_n + y_{n-1}$ 及上、下极限的性质可得

$$(\varliminf_{n\to\infty} y_n)^2 = \lim_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_{n-1}, \quad (\varlimsup_{n\to\infty} y_n)^2 = \lim_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_{n-1}.$$

综上可知， $\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n$ 与 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$ 均为方程

$$\xi^2 = \xi + a$$

的根，故由 $a \geqslant 0$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \geqslant 0$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \geqslant 0$ 可知，

$$\varliminf_{n\to\infty} y_n = \varlimsup_{n\to\infty} y_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2},$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在.

在讨论下面几个例题之前，我们先给出一个与性质 6.2.2 平行的关于函数上、下极限的性质.

性质 6.2.3 设 $f(x)$ 在点 $a \in \mathbb{R}$ 的某去心邻域内 (或 $a=\infty$, 当 $|x|$ 充分大时) 有定义，则 $\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)=A$ (其中 A 可以是 ∞) 的充分必要条件是：

(1) 存在数列 $\{x_n\}$, 满足 $x_n \neq a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$;

(2) 对于任意收敛于 a 的数列 $\{x_n'\}$ $(x_n' \neq a)$, 当 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')$ 存在时，必有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') \leqslant A.$$

性质 6.2.4 设 $f(x)$ 在点 $a \in \mathbb{R}$ 的某去心邻域内 (或 $a=\infty$, 当 $|x|$ 充分大时) 有定义， $\underline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)=B$ (其中 B 可以是 ∞) 的充分必要条件是：

(1) 存在数列 $\{x_n\}$, 满足 $x_n \neq a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=B$;

(2) 对于任意收敛于 a 的数列 $\{x_n'\}$ $(x_n' \neq a)$, 当 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')$ 存在时，必有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') \geqslant B.$$

例 6.2.13 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，且对 $\forall\, x,\ y \in (0,+\infty)$, 当 $y > x$ 时，有 $f(x) \leqslant f(xy)$, 求证： $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$.

证明 设 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x)=A$, $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x)=B$.

如果 $B=+\infty$ 或 $A=-\infty$, 则由

$$+\infty = \underline{\lim_{x\to+\infty}} f(x) \leqslant \lim_{x\to+\infty} f(x) \leqslant \overline{\lim_{x\to+\infty}} f(x) \leqslant +\infty$$

或

$$-\infty \leqslant \underline{\lim_{x\to+\infty}} f(x) \leqslant \lim_{x\to+\infty} f(x) \leqslant \overline{\lim_{x\to+\infty}} f(x) = -\infty$$

可知，结论成立.

不妨设 $-\infty < A$, 且 $B < +\infty$, 下面证明 $A=B$.

事实上，由 $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x)=B$ 及性质 6.2.3 的条件 (2) 可知，存在 $(0,+\infty)$ 中的一个数列 $\{x_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=B$.

另一方面，对 $x \in (0,+\infty)$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ 可知，存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n \geqslant N$ 时，有 $x_n > x^2$, 即 $\dfrac{x_n}{x} > x$, 从而由已知条件可知，当 $n \geqslant N$ 时，有

$$f(x) \leqslant f\left(x \cdot \frac{x_n}{x}\right) = f(x_n).$$

在上式中，令 $n \to \infty$, 得

$$f(x) \leqslant \lim_{n\to\infty} f(x_n) = B,$$

故由 x 的任意性可得

$$A=\varlimsup_{x\to+\infty}f(x)\leqslant B,$$

从而 $-\infty<B=A<+\infty$. 由此可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

例 6.2.14 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内的每个闭子区间上有界，且对 $\forall\, x,\ y\in(a,b)$, 有

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2},$$

求证 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

证明 我们只需证明：对 $\forall\, x_0\in(a,b)$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，且等于 $f(x_0)$.

首先证明：对 $\forall\, x_0\in(a,b)$, 左极限 $f(x_0-0)$ 与右极限 $f(x_0+0)$ 都存在.

设 $\varlimsup\limits_{x\to x_0^+}f(x)=L$, $\varliminf\limits_{x\to x_0^+}f(x)=l$, 根据上、下极限性质 6.2.3 可知，存在数列 $\{x_n\}$ 和 $\{x'_n\}$, 使得 $x_n>x_0$, $x'_n>x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=x_0$, 且

$$\lim_{n\to\infty}f(x'_n)=l,\quad \lim_{n\to\infty}f(x_n)=L.$$

分别选取 $\{x_n\}$ 和 $\{x'_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 和 $\{x'_{n'_k}\}$, 使得 $x_{n_k}>x'_{n'_k}$ $(k=1,2,\cdots)$, 并令 $x''_k=2x_{n_k}-x'_{n'_k}$ $(k=1,2,\cdots)$, 则有

$$f(x_{n_k})\leqslant\frac{f(x'_{n'_k})+f(x''_k)}{2}\quad(k=1,2,\cdots).$$

在上式中，令 $k\to+\infty$, 得

$$L\leqslant\frac{1}{2}[l+\varlimsup_{k\to\infty}f(x''_k)]\leqslant\frac{1}{2}(l+L),$$

从而 $l\geqslant L$, 于是 $L=l$, 即 $f(x_0+0)$ 存在. 同理可证，$f(x_0-0)$ 存在.

其次证明：对 $\forall\, x_0\in(a,b)$, 有 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

对 $\forall\, x_0\in(a,b)$ 及对 $\forall\, h>0$, 当 $x_0\pm2h\in(a,b)$ 时，有

$$f(x_0\pm h)\leqslant\frac{f(x_0)+f(x_0\pm2h)}{2},\quad f(x_0)\leqslant\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)}{2}.$$

在上面各式中，令 $h\to0^+$, 由第一式可推得

$$f(x_0-0)\leqslant f(x_0),\quad f(x_0+0)\leqslant f(x_0),$$

再由第二式及上式可得

$$f(x_0)\leqslant\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\leqslant\frac{f(x_0)+f(x_0-0)}{2},$$

$$f(x_0)\leqslant\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\leqslant\frac{f(x_0+0)+f(x_0)}{2},$$

从而

$$f(x_0) \leqslant f(x_0-0), \quad f(x_0) \leqslant f(x_0+0).$$

综上可知, $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$, 即 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 于是由 x_0 的任意性可知, $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

下面几个例子在证法上更具有综合性.

例 6.2.15 (Stolz 定理的推广)

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $[a,+\infty)$ 的任何有限区间上有界, T 为正常数, 且满足:

(1) 对 $\forall\, x \in [a,+\infty)$, 有 $g(x+T)>g(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$,

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$ (l 可以是 $\pm\infty$),

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=l$.

证明 只证明 l 为有限数的情形, $l=\pm\infty$ 的情形请读者自己完成证明.

对 $\forall\, \varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$ 可知, 存在 $A>a$, 使得当 $x \geqslant A$ 时, 有 $g(x)>0$, 且

$$l-\varepsilon<\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}<l+\varepsilon,$$

于是由 $g(x+T)>g(x)$ 可知, 当 $x \geqslant A$ 时, 有

$$(l-\varepsilon)[g(x+T)-g(x)]<f(x+T)-f(x)<(l+\varepsilon)[g(x+T)-g(x)], \qquad (*)$$

并由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在闭区间 $[A,A+T]$ 上有界可知, 存在常数 m_1, m_2, M_1, M_2, 使得对 $\forall\, x \in [A,A+T]$, 有 $m_1 \leqslant f(x) \leqslant M_1$, $m_2 \leqslant g(x) \leqslant M_2$.

对 $\forall\, y>A+T$, 记 $k=\left[\dfrac{y-A}{T}\right]$, $y^*=y-kT$, 则 $k \in \mathbb{Z}^+$, 且

$$A=y-T \cdot \frac{y-A}{T} \leqslant y^*=y-kT \leqslant y-T \cdot \left(\frac{y-A}{T}-1\right)=A+T,$$

即 $y^* \in [A,A+T]$, 于是对每一个 j $(j=1,2,\cdots,k)$, 由 $y^*+jT>A$ 及 $(*)$ 式可得

$$\begin{aligned}(l-\varepsilon)[g(y^*+jT)-g(y^*+(j-1)T)]&<f(y^*+jT)-f(y^*+(j-1)T)\\&<(l+\varepsilon)[g(y^*+jT)-g(y^*+(j-1)T)].\end{aligned}$$

将上述不等式两端从 $j=1$ 到 $j=k$ 相加, 并由 $y=y^*+kT$ 可得

$$(l-\varepsilon)[g(y)-g(y^*)]<f(y)-f(y^*)<(l+\varepsilon)[g(y)-g(y^*)],$$

于是由 $g(y)>0$ 及 $y^* \in [A,A+T]$ 可知, 对 $\forall\, y>A+T$, 有

$$(l-\varepsilon)\left[1-\frac{M_2}{g(y)}\right]+\frac{m_1}{g(y)}<\frac{f(y)}{g(y)}<(l+\varepsilon)\left[1-\frac{m_2}{g(y)}\right]+\frac{M_1}{g(y)}.$$

在上式中，令 $y\to+\infty$, 并由 $\lim\limits_{y\to+\infty}g(y)=+\infty$ 可得

$$l-\varepsilon\leqslant\varliminf_{y\to+\infty}\frac{f(y)}{g(y)}\leqslant\varlimsup_{y\to+\infty}\frac{f(y)}{g(y)}\leqslant l+\varepsilon,$$

从而由 ε 逼迫原理可知,

$$\varlimsup_{y\to+\infty}\frac{f(y)}{g(y)}=\varliminf_{y\to+\infty}\frac{f(y)}{g(y)}=l,$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

注 例 6.2.15 的结论在求一些函数的极限时往往是有用的 (见第 6 章第 3 节).

例 6.2.16 设 $a_n=\dfrac{n!}{n^n}\mathrm{e}^n\ (n=1,2,\cdots)$, 求证：数列 $\{a_n\}$ 是单调增加的，而数列 $\left\{\dfrac{a_n^2}{n}\right\}$ 收敛，并且对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有 $a_n^2>\mathrm{e}n$.

证明 对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 由 a_n 的定义可得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\mathrm{e}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n=\mathrm{e}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)^n,$$

将上式两端取对数后，利用 $\ln(1-x)$ 的幂级数展开式可得

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)&=1+n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(n+1)^k}\\&=1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n+1}{k(n+1)^k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(n+1)^k}\\&=1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(n+1)^k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(n+1)^k}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Big)\frac{1}{(n+1)^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(n+1)^k}>0,\end{aligned}$$

于是由 $\ln x$ 的单调性可知，对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 由 $\ln a_{n+1}>\ln a_n$ 可知， $a_{n+1}>a_n$, 即数列 $\{a_n\}$ 是单调增加的.

同理可知，对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\begin{aligned}\ln\frac{a_{n+1}^2}{n+1}-\ln\frac{a_n^2}{n}&=2\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}+\ln\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k(k+1)(n+1)^k}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(n+1)^k}\\&=-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k-1}{k(k+1)(n+1)^k}<0,\end{aligned}$$

所以数列 $\left\{\dfrac{a_n^2}{n}\right\}$ 是单调减少的，且对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$，由 $\dfrac{a_n^2}{n}>0$ 可知，数列 $\left\{\dfrac{a_n^2}{n}\right\}$ 有界，从而由单调有界原理可知，数列 $\left\{\dfrac{a_n^2}{n}\right\}$ 收敛.

另一方面，对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$，当 $n\geqslant 2$ 时，由 $a_1=\mathrm{e}$ 及

$$\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)n^k}>\frac{1}{2n}$$

可得

$$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1>\mathrm{e}^{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})},$$

从而由

$$\ln n=\int_1^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}x<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

可知，对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$，有

$$a_n^2>\mathrm{e}^{1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}>\mathrm{e}^{1+\ln n}=\mathrm{e}n.$$

注 1 在判断数列的单调性时，也可以考虑相邻两项比值之对数的符号，尤其是对于乘积形式的数列，这是很方便的.

注 2 在例 6.2.16 中，证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2}{n}$ 存在，但没有指出极限值. 实际上，把下列等式

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!},\quad n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n a_n,\quad (2n)!=\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}a_{2n}$$

代入 Wallis 公式 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2(2n+1)}=\dfrac{\pi}{2}$，并记 $b_n=\dfrac{a_n^2}{n}$，可得

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(2n+1)}\cdot\left(\frac{a_n^2}{n}\right)^2\cdot\frac{2n}{a_{2n}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(2n+1)}\cdot\frac{b_n^2}{b_{2n}}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}b_n,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2}{n}=2\pi$.

另外，由

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k-1}{k(k+1)(n+1)^k}<\frac{1}{6(n+1)^2}+\frac{1}{6}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^k}=\frac{1}{6}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)$$

可推出

$$\ln\frac{b_{n+1}}{b_n}=-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k-1}{k(k+1)(n+1)^k}\geqslant\frac{1}{6}(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}),$$

于是

$$b_{n+1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{6(n+1)}} \geqslant b_n\mathrm{e}^{-\frac{1}{6n}},$$

即 $\{b_n\mathrm{e}^{-\frac{1}{6n}}\}$ 为单调增加的数列，且由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n\mathrm{e}^{-\frac{1}{6n}} = 2\pi$ 可得

$$b_n\mathrm{e}^{-\frac{1}{6n}} < 2\pi < b_n.$$

利用介值定理可得

$$2\pi = b_n\mathrm{e}^{-\frac{\theta_n}{6n}} \quad (0 < \theta_n < 1).$$

这样我们便得到了著名的 Stirling① 公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}} \quad (0 < \theta_n < 1).$$

例 6.2.17 设 $f(x)$ 是定义在有限区间 $[a,b]$ 上的函数，且满足：

(1) 对 $\forall\, x \in [a,b]$, 有 $a \leqslant f(x) \leqslant b$;

(2) 存在 $r \in (0,1)$, 使得对 $\forall\, x,\ y \in [a,b]$, 有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant r|x-y|.$$

求证：对 $\forall\, x_0 \in [a,b]$, 如果定义 $x_{n+1} = f(x_n)\ (n = 0,1,2,\cdots)$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛，且极限值 ξ 满足 $f(\xi) = \xi$.

证明 由条件 (1) 与条件 (2) 可知，$x_n \in [a,b]\ (n = 1,2,\cdots)$, 且对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leqslant r|x_n - x_{n-1}|,$$

根据递推关系，对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant r^n|x_1 - x_0|.$$

又因为 $0 < r < 1$, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n|x_1 - x_0|$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛，于是由

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) + x_0\right] = \sum_{k=0}^{\infty}(x_{k+1} - x_k) + x_0$$

可知，$\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi \in [a,b]$.

另一方面，由条件 (2) 可知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 (并且是一致连续的), 从而

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi).$$

① Stirling, 斯特林， 1692—1770, 英国.

注 例 6.2.17 也称为 "压缩映射原理", 其证明也可利用 Cauchy 收敛原理来完成 (参看第 1 章第 7 节), 结论中的 ξ 称为 $f(x)$ 的不动点. 在例 6.2.17 的条件下, 还可以证明 ξ 是唯一的不动点. 事实上, 如果 $\eta \in [a,b]$ 为另一个不动点, 则

$$|\xi - \eta| = |f(\xi) - f(\eta)| \leqslant r|\xi - \eta|,$$

从而由 $0 < r < 1$ 可知, $\xi = \eta$.

关于不动点问题, 还有下面更弱一些的结论.

例 6.2.18 设 $f(x)$ 是定义在有限区间 $[a,b]$ 上的函数, 且满足:

(1) 对 $\forall\, x \in [a,b]$, 有 $a \leqslant f(x) \leqslant b$;

(2) 对 $\forall\, x,\ y \in [a,b]$, $x \neq y$, 有

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

求证: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一的不动点, 即存在唯一的 $\xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi) = \xi$, 并且对 $\forall\, x_0 \in [a,b]$, 由 $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n = 0,1,2,\cdots)$ 确定的数列 $\{x_n\}$ 收敛于 ξ.

证明 作辅助函数 $\varphi(x) = f(x) - x$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, 则由条件 (2) 可知, $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 并由条件 (1) 可得

$$\varphi(a) = f(a) - a \geqslant 0, \quad \varphi(b) = f(b) - b \leqslant 0,$$

于是由连续函数的介值定理知, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使 $\varphi(\xi) = 0$. 由此可知, ξ 为 $f(x)$ 的不动点, 并且是唯一的 (见例 6.2.17 的注释).

对 $\forall\, x_0 \in [a,b]$, 由条件 (1) 可知, 关系式 $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n = 0,1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 内确定了一个数列 $\{x_n\}$, 我们来证明 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - \xi| = 0$.

事实上, 由条件 (2) 可知, 对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$|x_n - \xi| = |f(x_{n-1}) - f(\xi)| < |x_{n-1} - \xi|,$$

故 $\{|x_n - \xi|\}$ 是严格单调减少的非负数列, 从而其极限存在, 设

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - \xi| = l \geqslant 0.$$

如果 $l > 0$, 令 $E = \{x \mid x \in [a,b],\ |x - \xi| \geqslant l\}$ (注意 E 可能是一个闭区间或两个闭区间的并集), 并作辅助函数

$$g(x) = \frac{|f(x) - \xi|}{|x - \xi|} \quad (x \in E),$$

则 $g(x)$ 在 E 上连续, 因而有最大值 r. 由于 $g(x) < 1$ $(x \in E)$, 故 $0 < r < 1$, 于是由 $x_n \in E$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ 可知, 对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$l \leqslant |x_n - \xi| = |f(x_{n-1}) - f(\xi)| \leqslant r|x_{n-1} - \xi| \leqslant \cdots \leqslant r^n|x_0 - \xi|.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n|x_0-\xi|=0$, 故 $l=0$. 这与 $l>0$ 矛盾，此矛盾说明 $l=0$.

例 6.2.19 设 $f(x)$ 是定义在 $[1,+\infty)$ 上的单调减少的非负连续函数，且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\int_1^x\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=A,$$

其中 α 为非负常数， A 为有限实数，求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^\alpha}=\alpha A$.

证明 设

$$F(x)=\int_1^x\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\quad(1\leqslant x<+\infty),$$

则对 $\forall\,\varepsilon>0$ 及 $\forall\,x\in[a,+\infty)$, 由积分中值定理可知，存在 $\xi\in[x,x+\varepsilon x]$, 使得

$$\frac{F(x+\varepsilon x)-F(x)}{x^\alpha}=\frac{1}{x^\alpha}\int_x^{x+\varepsilon x}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\frac{\varepsilon}{x^{\alpha-1}}\cdot\frac{f(\xi)}{\xi},$$

于是由 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上非负且单调减少可得

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\cdot\frac{f(x+\varepsilon x)}{x^\alpha}\leqslant\frac{F(x+\varepsilon x)-F(x)}{x^\alpha}\leqslant\varepsilon\cdot\frac{f(x)}{x^\alpha}.\tag{$*$}$$

由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{F(x+\varepsilon x)}{x^\alpha}-\frac{F(x)}{x^\alpha}\right]=[(1+\varepsilon)^\alpha-1]A,$$

令 $x\to+\infty$, 分别对 $(*)$ 式右端取下极限，左端取上极限，得

$$[(1+\varepsilon)^\alpha-1]A\leqslant\varepsilon\varliminf_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha},$$

$$[(1+\varepsilon)^\alpha-1]A\geqslant\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(1+\varepsilon)^\alpha\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha},$$

即

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha}\geqslant\frac{(1+\varepsilon)^\alpha-1}{\varepsilon}A,$$

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha}\leqslant\frac{(1+\varepsilon)^\alpha-1}{\varepsilon}(1+\varepsilon)^{1-\alpha}A.$$

令 $\varepsilon\to0^+$, 得

$$\alpha A\leqslant\varliminf_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha}\leqslant\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha}\leqslant\alpha A,$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha}=\alpha A.$$

注 例 6.2.19 不可以使用 L'Hospita 法则，原因是不知道极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}}\left(\int_1^x\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\right)'=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\alpha x^\alpha}$$

是否存在.

习题 6.2

6.2.1 求证数列 $\{\cos n\}$ 发散.

6.2.2 求证 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

6.2.3 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 并以 e 为最小正周期, 求证数列 $\{f(n)\}$ 发散. (提示: 利用公式 $\mathrm{e}=1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{\theta_n}{(n+1)!}$, 证明 $\{(m\mathrm{e})\mid m\in\mathbb{Z}^+\}$ 在 $(0,1)$ 上稠密.)

6.2.4 设 $\{a_n\}$ 为非负有界数列, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 其中

$$x_n=\underbrace{\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\cdots+\sqrt{a_n}}}}_{n\text{ 重根号}}\quad(n=1,2,\cdots).$$

6.2.5 设 $a_n=n\sin\dfrac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 其中

$$x_n=\underbrace{\sqrt{a_n+\sqrt{a_n+\cdots+\sqrt{a_n}}}}_{n\text{ 重根号}}\quad(n=1,2,\cdots).$$

6.2.6 设 $0<a_1<b_1$, $a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$, $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}\ (n=1,2,\cdots)$, 求证数列 $\{a_n\}$ 与数列 $\{b_n\}$ 均收敛于同一极限值.

6.2.7 设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}+2a_n=2$. 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在, 并求其值.

6.2.8 设 $0<a_1<\dfrac{1}{A}$, $a_{n+1}=a_n(2-Aa_n)\ (n=1,2,\cdots)$, 求证

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{A}.$$

6.2.9 设 $a>0$, 且 $x_1>\sqrt{a+1}$, $x_{n+1}=1+\dfrac{a}{1+x_n}\ (n=1,2,\cdots)$, 求证

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a+1}.$$

6.2.10 分别用单调有界原理与 Cauchy 收敛原理证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 其中

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\quad(n=1,2,\cdots).$$

6.2.11 设数列 $\{t_n\}$ 有界, 且数列 $\{a_n\}$ 满足

$$|a_{n+1}-a_n|\leqslant t_{n+1}-t_n\quad(n=1,2,\cdots),$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

(提示: 先证明 $\{t_n\}$ 收敛.)

6.2.12 设 $a_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$, 定义

$$t_n = \underbrace{\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_n}}}}_{n \text{ 重根号}} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

求证：当 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln\ln a_n}{n} < \ln 2$ 时，$\{t_n\}$ 收敛；当 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\ln a_n}{n} > \ln 2$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$.

6.2.13 设 $f(x) \in C^1[1, +\infty)$, 且 $|f'(x)| \sim \dfrac{1}{x^\alpha}\ (x \to +\infty)$, 求证：当 $\alpha > 1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在；当 $\alpha \leqslant 1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在.

6.2.14 设 $f(x) \in C^1[1, +\infty)$, 且对 $\forall\, x \in (1, +\infty)$, 有

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{1 + f^2(x)}\left[\sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln(1 + \frac{1}{x})}\right],$$

求证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

6.2.15 分别利用下列提示的思路证明例 6.2.10:

(1) 依定义证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

(2) 证明 $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x) = \overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x)$;

(3) 利用 Cauchy 收敛原理;

(4) 证明：对任意数列 $\{x_n\}$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.

6.2.16 设 $a_n > 0$, 且 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \dfrac{a_n}{a_m} = 1$, 求证：$\{a_n\}$ 收敛，且极限值大于零.

6.2.17 设 $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{2 + x_n}\ (n = 1, 2, \cdots)$, 试分别利用单调有界原理与 Cauchy 收敛原理证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求出极限值.

6.2.18 设 $x_0 < x_1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n + x_{n-1}}{2}\ (n = 1, 2, \cdots)$, 试用 Cauchy 收敛原理证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

6.2.19 设

$$x_n = \int_1^n \sin x \sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

求证数列 $\{x_n\}$ 收敛.

6.2.20 利用 Cauchy 收敛原理证明例 6.2.11 和例 6.2.12.

6.2.21 下面命题是否正确？并指出证明过程中的错误.

命题 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

证明 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0\ (0 < \delta < 1)$, 使得当 $|x' - x''| \leqslant \delta$ 时，有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$, 所以存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 使得当 $n > N$ 时，有

$$|f(n)| < \varepsilon.$$

令 $k_0=\left[\dfrac{1}{\delta}\right]$, 则有

$$k_0\delta \leqslant 1<(k_0+1)\delta.$$

现取 $A=N+1$, 则当 $x>A$ 时, 有

$$\begin{aligned}|f(x)|&=|f([x]+(x))|\leqslant|f([x]+(x))-f([x])|+|f([x])|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{i}|f([x]+(k-1)\delta)-f([x]+k\delta)|+|f([x]+i\delta)-f([x]+(x))|+|f([x])|\\&\leqslant i\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=(i+2)\varepsilon,\end{aligned}$$

其中 i 满足 $i\delta\leqslant(x)<(i+1)\delta$. 因为 $0\leqslant(x)\leqslant 1$, 从而有 $i<k_0$, 故

$$|f(x)|<(k_0+2)\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

6.2.22 设 $f(x)$ 是定义在有限区间 $[a,b]$ 上的函数, 且满足:

(1) 对 $\forall\, x\in[a,b]$, 有 $a\leqslant f(x)\leqslant b$;

(2) 对 $\forall\, x,\ y\in[a,b]$, $x\neq y$, 有

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|.$$

求证: 对 $\forall\, x_0\in[a,b]$, 由

$$x_{n+1}=\frac{x_n+f(x_n)}{2}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

确定的数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $[a,b]$ 中的点, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的值为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的唯一不动点.

(提示: 参考例 6.2.18.)

6.2.23 设 $f(x)\in C[0,+\infty)$, 且对 $\forall\, x\in(0,+\infty)$ 及 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$f(x)\leqslant f(nx),$$

求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在或为无穷大.

6.2.24 设 $f(x)\in C[0,+\infty)$, 且对 $\forall\, x,\ y\in(0,+\infty)$, 有

$$0\leqslant f(x+y)\leqslant f(x)+f(y),$$

求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\inf\limits_{x>0}\left\{\dfrac{f(x)}{x}\right\}$.

6.2.25 设 $x_n\geqslant c>0\ (n=1,2,\cdots)$, 求证: 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是对任何数列 $\{y_n\}$, 等式

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n$$

与等式

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n$$

至少有一个成立.

6.2.26 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是定义在 $[a,+\infty)$ 上的函数, T 为正常数, 且满足:

(1) 对 $\forall\, x\in[a,+\infty)$, 有 $0<g(x+T)<g(x)$, 且

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=0;$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}$ 存在或为无穷大, 记为 l, 即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l.$$

求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$.

6.2.27 设非负数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n\leqslant\dfrac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2}$ $(n=2,3,\cdots)$, 求证

$$\lim_{n\to\infty} n(a_{n+1}-a_n)=0.$$

6.2.28 设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 求证 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to\infty} f(f(x))=\infty.$$

6.2.29 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界, 且对 $\forall\, x,\ y\in(a,b)$, 有

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2},$$

求证 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 均存在.

6.2.30 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $0<a_{m+n}\leqslant a_na_m$ $(\forall\, m,\ n\in\mathbb{Z}^+)$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 存在.

6.2.31 设 $0<x_0<1$, $x_{n+1}=x_n-x_n^2$ $(n=0,1,2,\cdots)$, 求证 $x_n\sim\dfrac{1}{n}$ $(n\to\infty)$.

(提示: 先证明 $\{x_n\}$ 单调减少趋于零, 之后利用 Stolz 定理.)

6.2.32 设 $0<q<1$, $0<x_1<\dfrac{1}{q}$, 且数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+1}=x_n(1-qx_n)\quad(n=1,2,\cdots),$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=\dfrac{1}{q}$.

6.2.33 设 $\{x_n\}$ 为有界数列, 且对 $\forall\, k\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+k}-x_n)=0,$$

求证: 数列 $\{x_n\}$ 的聚点全体构成一个区间 $[l,L]$, 其中

$$l=\varliminf_{n\to\infty} x_n,\quad L=\varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

6.2.34 设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 且

$$a_{n+1}\leqslant pa_n+qa_{n-1}\ (n=2,3,\cdots),$$

其中 $0<p,\ q<1$, $p+q=1$. 求证 $\{a_n\}$ 收敛.

(提示: 用上、下极限.)

6.3　极限的求值

本节通过大量例题介绍一些确定和计算极限的常用方法和技巧. 在这之前, 先把所需要的主要公式与常用的极限做简要整理.

极限的运算法则和公式

(1) $\lim(Y \pm Z) = \lim Y \pm \lim Z$;

(2) $\lim YZ = \lim Y \cdot \lim Z$;

(3) $\lim \dfrac{Y}{Z} = \dfrac{\lim Y}{\lim Z}(\lim Z \neq 0)$;

(4) $\lim |Y| = |\lim Y|$;

(5) 设 $f(x)$ 为连续函数, 则 $\lim f(Y) = f(\lim Y)$.

注 上面各式中, 均假定变量 Y 和变量 Z 存在极限 (在同一过程中), 而 Y 和 Z 可以分别是数列或函数.

常用极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

(4) (Reimann 引理) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积 (如果是广义积分, 则要求绝对可积), 则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x = 0;\quad \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x = 0.$$

6.3.1　利用定义和两边夹原理求极限

在本章第 1 节中我们对极限定义做了一些讨论, 在利用定义求极限时, 首先要猜测出极限值, 然后再加以说明. 利用两边夹原理求极限则常常需要对变量从大小两方面进行估值.

例 6.3.1 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义, 并且在任何有限区间 $[a,b]$ 上可积. 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

分析 假如我们像下面那样用 L′Hospital 法则来求极限, 即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = l.$$

由于 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 不一定可导 (因为 $f(x)$ 未必是连续的), 因而是错误的. 不过这使我们可以猜到极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 等于 l. 其实, 从本题已知条件和结论的表现形式上看, 它和离散情形 (数列) 中的例 1.1.7 是很相似的, 从中不难得出证明方法. 下面就来证明这一事实.

解 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ 可知, 存在 $A_1>|a|$, 当 $x>A_1$ 时, 有

$$|f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{3},$$

于是对上述的 $\varepsilon>0$ 及 A_1, 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_a^{A_1}f(t)\mathrm{d}t=0$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{A_1 l}{x}=0$ 可知, 存在 $A_2>A_1$, 当 $x>A_2$ 时, 有

$$\left|\frac{1}{x}\int_a^{A_1}f(t)\mathrm{d}t\right|<\frac{\varepsilon}{3},\quad\left|\frac{A_1 l}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

综上可知, 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在正数 A_1 和 A_2, 使得 $A_2>A_1>|a|$, 且当 $x>A_2$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-l\right|&\leqslant\left|\frac{1}{x}\int_a^{A_1}f(t)\mathrm{d}t\right|+\left|\frac{1}{x}\int_{A_1}^x f(t)\mathrm{d}t-l\right|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\left|\frac{1}{x}\int_{A_1}^x[f(t)-l]\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_{A_1}^x l\mathrm{d}x-l\right|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{1}{x}\int_{A_1}^x|f(t)-l|\mathrm{d}x+\frac{|A_1 l|}{x}\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{x-A_1}{x}\cdot\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon,\end{aligned}$$

于是由极限定义可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=l.$$

例 6.3.2 设 $f(x)\in C[0,+\infty)$, 且 $\int_0^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 求证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}}f\left(\frac{x}{n}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x=f(0)\int_0^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

证明 由于 $\int_0^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 所以对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $A>0$, 当 $A_1>A$ 时, 有

$$\left|\int_{A_1}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

又因为 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，所以存在 $\delta>0$, 当 $0<x<\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(0)|<\varepsilon.$$

令 $N=\max\{[A^2],\ [\delta^2]\}$, 则当 $n>N$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{\sqrt{n}} f\left(\frac{x}{n}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x-f(0)\int_0^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x\right|\\
\leqslant&\left|\int_0^{\sqrt{n}}\left[f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)\right]\varphi(x)\mathrm{d}x\right|+|f(0)|\left|\int_{\sqrt{n}}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x\right|\\
\leqslant&\int_0^{\sqrt{n}}\left|f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)\right||\varphi(x)|\mathrm{d}x+\varepsilon|f(0)|\\
\leqslant&\varepsilon\int_0^{\sqrt{n}}|\varphi(x)|\mathrm{d}x+\varepsilon|f(0)|\leqslant\varepsilon\left(\int_0^{+\infty}|\varphi(x)|\mathrm{d}x+|f(0)|\right)=M\varepsilon.
\end{aligned}$$

由极限定义得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}} f\left(\frac{x}{n}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x=f(0)\int_0^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

例 6.3.3 设 $f(x)\in C[-\pi,\pi]$, 求证

$$\lim_{r\to1^-}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}f(\theta)\mathrm{d}\theta=2\pi f(0).$$

分析 很显然，当 $r\to1^-$ 时，被积函数的变化情况会因为 θ 的位置不同而有很大不同：在 $\theta=0$ 处，显然有

$$\lim_{r\to1^-}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}f(\theta)\Big|_{\theta=0}=\lim_{r\to1^-}\frac{1+r}{1-r}f(0)=\pm\infty,$$

其正负号是由 $f(0)$ 的符号决定的；而当 $0<\delta\leqslant\theta\leqslant\pi$ 时，

$$\lim_{r\to1^-}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}f(\theta)=0.$$

这说明随着 r 越来越接近于 1, 积分值越来越集中在点 $\theta=0$ 附近，这正是局部化问题 (参见第 1 章第 3 节), $\theta=0$ 就是奇异点. 因此，需要对积分按区间 $[-\pi,\pi]$ 的不同部位分别处理，我们从确定一个合适的 $\delta>0$ 入手.

证明 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 由 $f(\theta)$ 在点 $\theta=0$ 处连续可知，存在 $\delta>0$, 使得 $0<\delta<\pi$, 且当 $|\theta|\leqslant\delta$ 时，有 $|f(\theta)-f(0)|<\varepsilon$, 即

$$f(0)-\varepsilon<f(\theta)<f(0)+\varepsilon.$$

以下分 $0\leqslant|\theta|\leqslant\delta$ 和 $\delta\leqslant|\theta|\leqslant\pi$ 两种情况讨论.

首先考虑区间 $[\delta,\pi]$.

由于 $1-2r\cos\theta+r^2$ 在 $[\delta,\pi]$ 上关于 θ 单调增加，因而

$$1-2r\cos\theta+r^2>1-2r\cos\delta+r^2>0,$$

所以可得

$$\left|\int_\delta^\pi \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}f(\theta)\mathrm{d}\theta\right|\leqslant\frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2}\int_\delta^\pi|f(\theta)|\mathrm{d}\theta,$$

从而

$$\lim_{r\to1^-}\int_\delta^\pi\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}f(\theta)\mathrm{d}\theta=0.$$

同理

$$\lim_{r\to1^-}\int_{-\pi}^{-\delta}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}f(\theta)\mathrm{d}\theta=0.$$

由此可知

$$\lim_{r\to1^-}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}f(\theta)\mathrm{d}\theta=\lim_{r\to1^-}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}f(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

其次考虑区间 $[0,\delta]$.

当 $|r|<1$ 时，有

$$\begin{aligned}[f(0)-\varepsilon]\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\,\mathrm{d}\theta&<\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}f(\theta)\mathrm{d}\theta\\&<[f(0)+\varepsilon]\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

以下计算积分 $\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\,\mathrm{d}\theta$. 利用代换 $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ 可得

$$\begin{aligned}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\,\mathrm{d}\theta&=2\int_{-\tan\frac{\delta}{2}}^{\tan\frac{\delta}{2}}\frac{1-r^2}{(1-r)^2+(1+r)^2t^2}\,\mathrm{d}\theta\\&=4\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{\delta}{2}\right),\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{r\to1^-}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\,\mathrm{d}\theta=\lim_{r\to1^-}4\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{\delta}{2}\right)=2\pi.$$

在上面的不等式中，令 $r\to1^-$, 得

$$[f(0)-\varepsilon]2\pi\leqslant\lim_{r\to1^-}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}f(\theta)\mathrm{d}\theta\leqslant[f(0)+\varepsilon]2\pi,$$

从而由 ε 逼迫原理可得

$$\lim_{r\to1^-}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}f(\theta)\mathrm{d}\theta=2\pi f(0).$$

综上可得

$$\lim_{r\to1^-}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}f(\theta)\mathrm{d}\theta=2\pi f(0).$$

例 6.3.4 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，其中

$$x_n=\underbrace{\sqrt{n\sin\frac{1}{n}+\sqrt{n\sin\frac{1}{n}+\cdots+\sqrt{n\sin\frac{1}{n}}}}}_{n\text{ 重根号}}\quad(n=1,2,\cdots).$$

分析 从题型上看，本题似乎可以用递推公式来求极限，但实际上很难用等式建立 x_n 与 x_{n-1} 等之间的关系，不过可以建立不等式. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{1}{n}=1$，可以考虑另一个数列

$$y_n=\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}_{n\text{ 重根号}}\quad(n=1,2,\cdots).$$

由不等式 $n\sin\dfrac{1}{n}<1$ 推得 $x_n<y_n=\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}$，所以有

$$\lim_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}_{n\text{ 重根号}}.$$

至于另一面的不等式则要利用 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的性质.

解 令

$$y_n=\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}_{n\text{ 重根号}}\quad(n=1,2,\cdots),$$

则易知 $\{y_n\}$ 单调增加，并且利用归纳法可推知 $y_n<2\ (n=1,2,\cdots)$，于是由单调有界原理可知，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在，并由关系式 $y_n^2=1+y_{n-1}$ 可推得

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

另一方面，令

$$z_n = \underbrace{\sqrt{n\sin\frac{1}{n} + \sqrt{n\sin\frac{1}{n} + \cdots + \sqrt{n\sin\frac{1}{n}}}}}_{n-1\text{ 重根号}} \ (n = 1, 2, \cdots),$$

则 $z_n < x_n$, 并由 $\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $[0, \pi]$ 上单调减少可得

$$n\sin\frac{1}{n} > (n-1)\sin\frac{1}{n-1},$$

故当 $n > 1$ 时，有

$$\begin{aligned} z_n &= \underbrace{\sqrt{n\sin\frac{1}{n} + \sqrt{n\sin\frac{1}{n} + \cdots + \sqrt{n\sin\frac{1}{n}}}}}_{n-1\text{ 重根号}} \\ &> \underbrace{\sqrt{(n-1)\sin\frac{1}{n-1} + \sqrt{(n-1)\sin\frac{1}{n-1} + \cdots + \sqrt{(n-1)\sin\frac{1}{n-1}}}}}_{n-1\text{ 重根号}} \\ &= x_{n-1}, \end{aligned}$$

从而当 $n > 1$ 时，有

$$x_{n-1} < z_n < x_n.$$

由上式及 $x_n < y_n$ 可知，$\{x_n\}$ 单调增加且有界，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

又对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$\sqrt{n\sin\frac{1}{n} + x_{n-1}} < \sqrt{n\sin\frac{1}{n} + z_n} = x_n < y_n,$$

在上式中，令 $n \to \infty$, 得

$$\sqrt{1+l} \leqslant l \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

解左边的不等式得

$$l \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

从而 $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, 即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

例 6.3.5 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足条件: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=l$, $b_n>0\ (n=1,2,\cdots)$. 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}}{b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{2n}}.$$

解 对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 令

$$c_i=\frac{b_{n+i}}{b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{2n}}\quad (i=1,2,\cdots,n),$$

则由 $b_n>0\ (n=1,2,\cdots)$ 可知, $c_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}c_i=1$, 于是

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{a_{n+i}}{b_{n+i}}\right\}\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i\frac{a_{n+i}}{b_{n+i}}\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{a_{n+i}}{b_{n+i}}\right\}.$$

由此可知, 对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\inf_{k\geqslant n}\left\{\frac{a_k}{b_k}\right\}\leqslant\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}}{b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{2n}}\leqslant\sup_{k\geqslant n}\left\{\frac{a_k}{b_k}\right\},$$

从而由

$$\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geqslant n}\left\{\frac{a_k}{b_k}\right\}=\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n}\left\{\frac{a_k}{b_k}\right\}$$

可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}}{b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{2n}}=l.$$

6.3.2 利用 Stolz 定理和 L′Hospital 法则求极限

在极限的求值问题中，不定型的定值问题占有相当比重. 常见的不定型有

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 1^{\infty},\quad 0^0,\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad \infty^0$$

等. 处理不定型问题时, Stolz 定理与 L′Hospital 法则是常用的、行之有效的方法.

定理 6.3.1 $\left(\text{Stolz 定理}, \dfrac{0}{0}\text{ 型}\right)$

设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$,

(2) $b_{n+1}<b_n\ (n=1,2,\cdots)$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在,

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.

定理 6.3.2 $\left(\text{Stolz 定理}, \ \dfrac{\infty}{\infty}\text{ 型}\right)$
设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$,

(2) $b_{n+1} > b_n \ (n = 1, 2, \cdots)$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ 存在或为无穷大,

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$.

定理 6.3.3 $\left(\text{L'Hospital 法则}, \ \dfrac{0}{0}\text{ 型}\right)$
设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足:

(1) $\lim f(x) = 0$, $\lim g(x) = 0$,

(2) $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 均存在, 且 $g'(x) \neq 0$,

(3) $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为无穷大,

则 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

定理 6.3.4 $\left(\text{L'Hospital 法则}, \ \dfrac{\infty}{\infty}\text{ 型}\right)$
设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足:

(1) $\lim f(x) = \infty$, $\lim g(x) = \infty$,

(2) $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 均存在, 且 $g'(x) \neq 0$,

(3) $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为无穷大,

则 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

例 6.3.6 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x^2\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

解 由 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x^2\mathrm{e}^x)}{1 - \cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{1 + x^2\mathrm{e}^x} \cdot (2x + x^2)\mathrm{e}^x}{\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{(2 + x)\mathrm{e}^x}{1 + x^2\mathrm{e}^x} = 2,
\end{aligned}$$

从而由指数函数的连续性可得

$$\lim_{x\to 0}(1 + x^2\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x^2\mathrm{e}^x)}{1 - \cos x}} = \mathrm{e}^2.$$

例 6.3.7 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-x}}-\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{x\sin x}}$.

解 将 $\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-x}}-\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{x\sin x}}$ 初等变形，得

$$\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-x}}-\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{x\sin x}}=\frac{\mathrm{e}^{-x}-\cos x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-x}}+\sqrt{1+\cos x}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x\sin x}},$$

于是由

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-x}}+\sqrt{1+\cos x}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

及

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\cos x}{x}=\lim_{x\to0^+}(-\mathrm{e}^{-x}+\sin x)=-1$$

可得

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-x}}-\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{x\sin x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\cos x}{2\sqrt{2}x}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

注 在例 6.3.7 中，如果直接应用 L'Hospital 法则，计算量将大大增加，而采用初等变形，则可分离出一部分已知极限的变量 (如 $\sqrt{1+\mathrm{e}^{-x}}+\sqrt{1+\cos x}$). 另外，我们在处理 $\sqrt{\sin x}$ 时，利用了等价量的替换法，即用 $\sqrt{x}$ 代替 $\sqrt{\sin x}$. 我们这样做的依据是下面的命题.

命题 6.3.1 设 $\alpha_1\sim\alpha_2$, $\beta_1\sim\beta_2$, 则

$$\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\lim\frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

在应用命题 6.3.1 时，要先将变量转化成相乘或相除的形式，对于加减运算的变量则不可以直接替换. 如：

$$\lim_{x\to0}\frac{(\mathrm{e}^x-1)-\sin x}{x^2}\neq\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x^2}.$$

例 6.3.8 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\mathrm{e}^x-1)-(\mathrm{e}^{\sin x}-1)}{x\ln(1+x)}$.

解 由 $\ln(1+x)\sim x\ (x\to0)$ 及 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\mathrm{e}^x-1)-(\mathrm{e}^{\sin x}-1)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\mathrm{e}^x-1)-(\mathrm{e}^{\sin x}-1)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x\cos(\mathrm{e}^x-1)-\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{2x}.$$

将 $\dfrac{\mathrm{e}^x\cos(\mathrm{e}^x-1)-\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{2x}$ 初等变形，得

$$\frac{\mathrm{e}^x\cos(\mathrm{e}^x-1)-\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{2x}=\frac{\mathrm{e}^x}{2}\left[\frac{\cos(\mathrm{e}^x-1)-\cos x}{x}\right]+\frac{\cos x}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}}{x}\right),$$

并由

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\mathrm{e}^x-1)-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}[-\mathrm{e}^x\sin(\mathrm{e}^x-1)+\sin x]=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}}{x}=\lim_{x\to 0}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}\cos x)=0$$

可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\cos(\mathrm{e}^x-1)-\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{2x}=0,$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\mathrm{e}^x-1)-(\mathrm{e}^{\sin x}-1)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\cos(\mathrm{e}^x-1)-\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{2x}=0.$$

例 6.3.9 设 $x_0\in(0,\pi)$, $x_n=\sin x_{n-1}\ (n=1,2,\cdots)$, 求证 $x_n^2\sim\dfrac{3}{n}\ (n\to\infty)$.

证明 对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有 $0<x_n<1$, 且

$$x_{n+1}=\sin x_n\leqslant x_n,$$

从而由单调有界原理可知, $\{x_n\}$ 收敛, 其极限值记为 l, 并由

$$l=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sin x_n=\sin l$$

可得 $l=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

另一方面, 令 $b_n=\dfrac{1}{x_n^2}$, $a_n=n\ (n=1,2,\cdots)$, 则

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{(n+1)-n}{\dfrac{1}{x_{n+1}^2}-\dfrac{1}{x_n^2}}=\frac{x_n^2x_{n+1}^2}{x_n^2-x_{n+1}^2}=\frac{x_n^2\sin^2 x_n}{x_n^2-\sin^2 x_n},$$

于是由

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin^2 t}{t^2-\sin^2 t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^4}{t^2-\sin^2 t}=\lim_{t\to 0}\frac{4t^3}{2t-2\sin t\cos t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{6t^2}{1-\cos^2 t+\sin^2 t}=\lim_{t\to 0}\frac{3t^2}{\sin^2 t}=3$$

及 Stolz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}nx_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to 0}\frac{x_n^2\sin^2 x_n}{x_n^2-\sin^2 x_n}=3,$$

即 $x_n^2\sim\dfrac{3}{n}\ (n\to\infty)$.

注 例 6.3.9 中, 把离散型变量转换为连续变量来计算, 然后再应用 L'Hospital 法则. 这种方法在处理极限问题时是经常用到的. 下面再举一例.

例 6.3.10 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$.

解 因为当 $x>1$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t=2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,$$

所以利用 L'Hospital 法则，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t=2\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=2,$$

从而由 Heine 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=2.$$

例 6.3.10 也可以利用 Stolz 定理来求解，请读者自己完成.

6.3.3　建立以极限值为变元的方程求极限

对于那些由递推关系定义的数列，可先证明其极限存在，然后通过取极限得到以极限值为变元的方程，解此方程即可求得数列的极限值.

例 6.3.11 设 $x_1=a>0$, $x_{n+1}=a+\frac{1}{x_n}\ (n=1,2,\cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

分析 首先假定 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$, 则

$$l=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{1}{x_n}\right)=a+\frac{1}{l},$$

于是由 $x_n>a$ 及上式解得

$$l=\frac{a}{2}+\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}.$$

剩下的事情就是要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在．这很自然使我们想到单调有界原理．由

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}=\frac{x_{n-1}-x_n}{x_nx_{n-1}}\quad(n=2,3,\cdots)$$

可知，数列 $\{x_n\}$ 不是单调的，但能分解成两个单调的子列 $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$. 下面的证明是我们在第 6 章第 2 节中介绍的常用方法之一 (参看例 6.2.5).

解 设 $l=\frac{a}{2}+\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}$, 则 $l^2=al+1$, 且

$$a=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}<\frac{a}{2}+\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}=l.$$

下面用归纳法证明：对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$x_{2n-1} < l < x_{2n}. \tag{$*$}$$

事实上，当 $n=1$ 时，有

$$x_1 = a < l = a + \frac{1}{l} < a + \frac{1}{a} = x_2.$$

假定 $(*)$ 式对 $n = k \geqslant 1$ 成立，则当 $n = k+1$ 时，有

$$x_{2k+1} - l = a - l + \frac{1}{x_{2k}} < a - l + \frac{1}{l} = 0,$$
$$x_{2k+2} - l = a - l + \frac{1}{x_{2k+1}} > a - l + \frac{1}{l} = 0,$$

从而 $(*)$ 式对一切 $n \in \mathbb{Z}^+$ 都成立.

另一方面，对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$x_{2n+2} - x_{2n} = \frac{1}{x_{2n+1}} - \frac{1}{x_{2n-1}} = \frac{x_{2n-1} - x_{2n+1}}{x_{2n-1}x_{2n+1}},$$

并由 $(*)$ 式及 $f(x) = -x^2 + ax + 1$ 在 $[a, l]$ 上单调减少可得

$$\begin{aligned} x_{2n+1} - x_{2n-1} &= a + \frac{1}{x_{2n}} - x_{2n-1} \\ &= a\frac{1 + ax_{2n-1} - x_{2n-1}^2}{1 + ax_{2n-1}} > a\,\frac{1 + al - l^2}{1 + ax_{2n-1}} = 0, \end{aligned}$$

所以 $\{x_{2n+1}\}$ 单调增加且有界，而 $\{x_{2n}\}$ 单调减少且有界，从而由单调有界原理可知，存在常数 l_1 及 l_2, 使得

$$l_1 = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} \leqslant l \leqslant \lim_{n\to\infty} x_{2n} = l_2.$$

另一方面，由 $x_{n+1} = a + \dfrac{1}{x_n}\ (n = 1, 2, \cdots)$ 可得

$$\begin{cases} l_1 = a + \dfrac{1}{l_2}, \\ l_2 = a + \dfrac{1}{l_1}, \end{cases}$$

解此方程组可得 $l_1 = l_2$, 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

例 6.3.12 设 $0 < x_n < 1$, $(1 - x_n)x_{n+1} > \dfrac{1}{4}\ (n = 1, 2, \cdots)$, 求证

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}.$$

证明 设 $f(x) = (1 - x)x\ (0 \leqslant x \leqslant 1)$, 则易知

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\{f(x)\} = \frac{1}{4},$$

故对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 由 $0<x_n<1$ 可得

$$(1-x_n)x_n\leqslant\frac{1}{4},$$

从而由 $(1-x_n)x_{n+1}>\dfrac{1}{4}$ 可得

$$(1-x_n)(x_{n+1}-x_n)=(1-x_n)x_{n+1}-(1-x_n)x_n>\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0.$$

因此数列 $\{x_n\}$ 单调增加且有界，故存在常数 l, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$, 于是

$$(1-l)l=\lim_{n\to\infty}(1-x_n)x_n\leqslant\frac{1}{4},\quad (1-l)l=\lim_{n\to\infty}(1-x_n)x_{n+1}\geqslant\frac{1}{4}.$$

由此可知， $l=\dfrac{1}{2}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$.

例 6.3.13 设 $x_1=a$, $x_{n+1}=x_n^2+(1-2b)x_n+b^2$ $(n=1,2,\cdots)$, 试确定常数 a, b, 使得数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求出极限值.

解 对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 由已知条件可得

$$x_{n+1}-x_n=(x_n-b)^2\geqslant 0,$$

从而 $\{x_n\}$ 单调增加.

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，即存在常数 l, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$, 则

$$l-l=\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=\lim_{n\to\infty}(x_n-b)^2=(l-b)^2,$$

即 $l=b$, 从而由 $\{x_n\}$ 单调增加可知， $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在的充分条件是

$$x_n\leqslant b\quad(n=1,2\cdots),$$

这等价于 $x_n^2+(1-2b)x_n+b^2\leqslant b$, 即

$$(x_n-b)(x_n-b+1)=x_n^2+(1-2b)x_n+b^2-b\leqslant 0.$$

由此可知， $b-1\leqslant x_n\leqslant b$, 于是当 $b-1\leqslant a\leqslant b$ 时，数列 $\{x_n\}$ 收敛于 b.

注 在例 6.3.11 至例 6.3.13 中，为了证明单调性或有界，我们借助了辅助函数，如例 6.3.11 中的

$$f(x)=1+ax-x^2,$$

例 6.3.12 中的

$$f(x)=(1-x)x$$

及例 6.3.13 中的

$$f(x)=x^2+(1-2b)x+b^2-b.$$

这常常是很有用的.

例 6.3.14 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有各阶导数，且对 $\forall\, x$ 及 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$|f^{(n)}(x)-f^{(n-1)}(x)|<\frac{1}{n^2},$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x)$.

解 记 $f(x)=f^{(0)}(x)$, 则对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 由条件

$$|f^{(n)}(x)-f^{(n-1)}(x)|<\frac{1}{n^2}$$

及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛可知，函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f^{(n)}(x)-f^{(n-1)}(x)]$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对一致收敛，从而由

$$f^{(n)}(x)-f(x)=\sum_{k=1}^{n}[f^{(k)}(x)-f^{(k-1)}(x)]\quad(n=1,2,\cdots)$$

可知，函数列 $\{f^{(n)}(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，记

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}f^{(n)}(x)\quad(-\infty<x<+\infty).$$

又因 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有各阶导数，且函数列 $\{f^{(n)}(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，求导与极限可以交换次序，故有

$$g'(x)=\lim_{n\to\infty}f^{(n+1)}(x)=g(x),$$

解此方程可得 $g(x)=c\mathrm{e}^x$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}f^{(n)}(x)=c\mathrm{e}^x\quad(-\infty<x<+\infty),$$

其中 c 为任意常数.

6.3.4 利用积分和求极限

有些数列是以和的形式 (或可转化为和的形式) 给出的，求这类数列极限的常用方法之一是将它们转化为积分和，利用定积分求极限.

例 6.3.15 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

分析 因为对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\Big)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{k}{n}}},$$

所以可将求极限问题转化为求积分问题.

解 设 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，从而定积分的值与区间 $[0,1]$ 的分法以及 ξ_i 的取法无关.

将区间 $[0,1]$ 进行 n 等分，并把分点记为 $x_k=\dfrac{k}{n}\ (k=0,1,2,\cdots,n)$, 每一个小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 的长度记为 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}=\dfrac{1}{n}$, 在每一个小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 内选取一点 $\xi_k=x_k$, 则由定积分的定义可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{k}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}}=2(\sqrt{2}-1),$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{k}{n}}}\right)=2(\sqrt{2}-1).$$

注 例 6.3.15 利用了 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ 在 $[0,1]$ 上可积这一事实，下面的例子中，省略了将求极限问题转化为求积分问题的具体步骤.

例 6.3.16 设

$$x_n=\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\dfrac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\dfrac{1}{n}}\quad(n=1,2,\cdots),$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 由 $n\leqslant n+\dfrac{1}{n}\leqslant n+1$ 可得

$$\frac{1}{n+1}(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}})\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{n}(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}),$$

再由定积分的定义可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}})=\int_0^1 2^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}})=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}\right)\right]=\frac{1}{\ln 2},$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{\ln 2}.$$

例 6.3.17 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少，且 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x,$$

并求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+k^2}$.

证明 对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 由 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛可得

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x,$$

并由 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少可知，对每一个 k $(k=0,1,2,\cdots)$, 有

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right),$$

于是 $x_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(\dfrac{k}{n})$ 满足

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}f(0),$$

即对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}f(0) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

在上式中，令 $n \to \infty$, 并利用两边夹原理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

另一方面，令 $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, 则 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少，且 $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，从而由已证得的结论可得

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

例 6.3.18 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，且 $f(x) > 0$, 求

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}.$$

解 设 $y_n = \ln\left[\sqrt[n]{f\left(\dfrac{1}{n}\right)f\left(\dfrac{2}{n}\right)\cdots f\left(\dfrac{n}{n}\right)}\right]$ $(n=1,2,\cdots)$, 则

$$y_n = \ln\left[\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right),$$

并由 $\ln f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，得

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=\mathrm{e}^{\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x}.$$

6.3.5　利用 Reimann 引理求极限

例 6.3.19　求 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_0^1 \frac{\cos^2\lambda t}{1+t}\mathrm{d}t$.

解　由 $\cos^2\lambda t=\frac{1+\cos 2\lambda t}{2}$ 可得

$$\int_0^1 \frac{\cos^2\lambda t}{1+t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\cos 2\lambda t}{1+t}\mathrm{d}t,$$

并由 Reimann 引理可得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1 \frac{\cos 2\lambda t}{1+t}\mathrm{d}t=0,$$

从而

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\cos^2\lambda t}{1+t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\frac{1}{2}\ln 2.$$

例 6.3.20　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n \frac{n\sin^2 t}{n^2+t^2}\mathrm{d}t$.

解　对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 令 $x=\frac{t}{n}$, 则

$$n\int_0^n \frac{\sin^2 t}{n^2+t^2}\mathrm{d}t=\int_0^1 \frac{\sin^2 nx}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\cos 2nx}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

并由 Reimann 引理可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\cos 2nx}{1+x^2}\mathrm{d}x=0,$$

从而由

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{n\sin^2 t}{n^2+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{8}.$$

6.3.6　利用 Toeplitz 定理求极限

Toeplitz[①] 定理在求数列极限问题时是很有用的，尤其是那些具有有限和形式的数列．先来介绍一下这个定理．

① Toeplitz, 托普利茨， 1881—1940, 德国.

设 (p_{nm}) 为无穷三角阵:

$$\begin{array}{llllll} p_{00}, & & & & & \\ p_{10}, & p_{11}, & & & & \\ p_{20}, & p_{21}, & p_{22}, & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ p_{n0}, & p_{n1}, & \cdots & \cdots, & p_{nn} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

另设 $\{x_n\}$ 为一数列, 定义

$$y_n = p_{n0}x_0 + p_{n1}x_1 + \cdots + p_{nn}x_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

称 $\{y_n\}$ 为经 $\{p_{nm}\}$ 变换 $\{x_n\}$ 而得到的数列.

定理 6.3.5 (Toeplitz 定理)

设无穷三角阵 (p_{nm}) 满足:

(1) 对每一个 m $(m = 0, 1, 2, \cdots)$, 有

$$\lim_{n\to\infty} p_{nm} = 0,$$

(2) 存在常数 K, 使得对每一个 n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 有

$$\sum_{m=0}^{n} |p_{nm}| \leqslant K,$$

则当数列 $\{x_n\}$ 收敛于零时, 经 $\{p_{nm}\}$ 变换得到的数列 $\{y_n\}$ 也收敛于零.

如果进一步假定 $\{p_{nm}\}$ 还满足

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} p_{nm} = 1,$$

则当数列 $\{x_n\}$ 收敛时, 数列 $\{y_n\}$ 也收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证明 先证明该定理的前半部分.

由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 可知, 存在 $M > 0$, 使得

$$|x_n| < M \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

并且对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

对于上述的 $\varepsilon > 0$ 及取定的正整数 N, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{nm} = 0$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ 可知, 存在 $N_1 \in \mathbb{Z}^+$, 使得 $N_1 > N$, 且当 $n > N_1$ 时, 有

$$|p_{nm}| < \frac{\varepsilon}{2(N+1)M} \quad (m = 0, 1, 2, \cdots, N),$$

从而当 $n > N_1$ 时，由 y_n 的定义可得

$$\begin{aligned}|y_n| &= |p_{n0}x_0 + p_{n1}x_1 + \cdots + p_{nn}x_n| \\ &\leqslant |p_{n0}x_0| + |p_{n1}x_1| + \cdots + |p_{nN}x_N| + |p_{nN+1}x_{N+1}| + \cdots + |p_{nn}x_n| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2(N+1)M} \cdot (N+1)M + (|p_{nN+1}| + \cdots + |p_{nn}|)\frac{\varepsilon}{2K} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

下面证明第二部分.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s$, 且数列 $\{x_n - s\}$ 经 $\{p_{nm}\}$ 变换得到的数列记为 $\{z_n\}$, 则

$$\begin{aligned}z_n &= p_{n0}(x_0 - s) + p_{n1}(x_1 - s) + \cdots + p_{nn}(x_n - s) \\ &= p_{n0}x_0 + p_{n1}x_1 + \cdots + p_{nn}x_n - s\sum_{m=0}^{n} p_{nm} \\ &= y_n - s\sum_{m=0}^{n} p_{nm} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),\end{aligned}$$

并由前面证得的结论可得

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0.$$

又已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=0}^{n} p_{nm} = 1$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n + s\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{n} p_{nm} = s.$$ ∎

例 6.3.21 设数列 $\{x_n\}$ 收敛，求证

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\left(x_0 + C_n^1 x_1 + \cdots + C_n^n x_n\right).$$

证明 令

$$p_{nm} = \frac{1}{2^n} C_n^m \quad (m = 0, 1, \cdots, n,\ n = 0, 1, 2, \cdots),$$

则易知 (p_{nm}) 满足 Toeplitz 定理条件，且对每一个 n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 有

$$p_{n0}x_0 + p_{n1}x_1 + \cdots + p_{nn}x_n = \frac{1}{2^n}(x_0 + C_n^1 x_1 + C_n^2 x_2 + \cdots + C_n^n x_n),$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}(x_0 + C_n^1 x_1 + \cdots + C_n^n x_n).$$

例 6.3.22 设正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n$ 收敛于 p $(p > 0)$, 而数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 求

$$\lim_{n\to\infty}(x_0 p_n + x_1 p_{n-1} + \cdots + x_n p_0).$$

解 令

$$p_{nm}=\frac{p_{n-m}}{p_0+p_1+\cdots+p_n}\quad(m=0,1,\cdots,n,\ n=1,2,\cdots),$$

则由正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_n$ 收敛于 $p\ (p>0)$ 可知，对每一个 $m\ (m=0,1,2,\cdots)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}p_{nm}=\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n-m}}{p_0+p_1+\cdots+p_n}=0,$$

且对每一个 $n\ (n=0,1,2,\cdots)$, 有

$$\sum_{m=0}^{n}p_{nm}=\sum_{m=0}^{n}\frac{p_{n-m}}{p_0+p_1+\cdots+p_n}=1,$$

故由数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 及 Toeplitz 定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x_0p_n+x_1p_{n-1}+\cdots+x_np_0)}{p_0+p_1+\cdots+p_n}=\lim_{n\to\infty}(p_{n0}x_0+p_{n1}x_1+\cdots+p_{nn}x_n)=a,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}(x_0p_n+x_1p_{n-1}+\cdots+x_np_0)=ap.$$

例 6.3.23 求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\ln\frac{2}{2^2-1}+\frac{1}{2^{n-2}}\ln\frac{2^2}{2^3-1}+\cdots+\frac{1}{2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right).$$

解 令 $x_0=0,\ x_n=\ln\dfrac{2^{n-1}}{2^n-1}\ (n=1,2,3,\cdots)$, 则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}=\ln\frac{1}{2}.$$

另一方面，令 $p_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}\ (n=0,1,2,\cdots)$, 则易知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_n=1$, 且当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$\sum_{m=0}^{n}x_mp_{n-m}=\frac{1}{2^{n-1}}\ln\frac{2}{2^2-1}+\frac{1}{2^{n-2}}\ln\frac{2^2}{2^3-1}+\cdots+\frac{1}{2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1},$$

从而由例 6.3.22 可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\ln\frac{2}{2^2-1}+\frac{1}{2^{n-2}}\ln\frac{2^2}{2^3-1}+\cdots+\frac{1}{2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)=\ln\frac{1}{2}.$$

注 以上三个例子我们应用了 Toeplitz 定理，这使求极限问题变得很简单. 但问题是如何寻找或构造变换三角阵 (p_{nm}). 这是有一定难度的技巧性问题，必须多做一些练习，才能提高这方面的技巧.

6.3.7 求极限的其他方法

变量的形式是多种多样的, 因而求极限的方法也自然是灵活多变的. 不可能把它们都一一列举出来. 前面介绍的是具有一定代表性的几种方法, 下面我们再举几个利用其他方法求极限的例子.

例 6.3.24 (变量转换法)

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 是方程 $\tan x = x$ 全部正根按由小到大的次序排列成的数列, 试求

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 \sin(x_n - x_{n-1}).$$

解 由 $x_n\ (n=1,2,\cdots)$ 是方程 $\tan x = x$ 的根, 且 $x_n < x_{n+1}$ 可知,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty,$$

且对每一个 $n\ (n=2,3,\cdots)$, 有

$$\frac{\pi}{2} \leqslant x_n - x_{n-1} \leqslant \frac{3\pi}{2},$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = 1.$$

令 $y_n = x_n - x_{n-1}\ (n=2,3,\cdots)$, 则 $\{y_n\}$ 有界, 并由

$$\tan y_n = \frac{\tan x_n - \tan x_{n-1}}{1+\tan x_n \tan x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{1+x_n x_{n-1}} = \frac{y_n}{1+x_n x_{n-1}}$$

可得

$$\lim_{n\to\infty} \tan y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{1+x_n x_{n-1}} = 0,$$

故由 $\dfrac{\pi}{2} \leqslant y_n \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$ 可得

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \pi,$$

从而由

$$\begin{aligned} x_n^2 \sin(x_n - x_{n-1}) &= \frac{x_n^2}{1+x_n x_{n-1}} \cdot (1+x_n x_{n-1}) \cdot \sin y_n \\ &= \frac{x_n^2}{1+x_n x_{n-1}} \cdot \frac{y_n}{\tan y_n} \cdot \sin y_n \\ &= \frac{x_n^2}{1+x_n x_{n-1}} \cdot y_n \cdot \cos y_n \end{aligned}$$

可得

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 \sin(x_n - x_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{1+x_n x_{n-1}} \cdot y_n \cdot \cos y_n = -\pi.$$

例 6.3.25 设 $m, n \neq 0$, 求

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{n}{\mathrm{e}^{n\sin x}-1}-\frac{m}{\mathrm{e}^{m\sin x}-1}\right).$$

解 令 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$, 则当 $x\to 0$ 时, 有 $y\to 1$, 于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{n}{\mathrm{e}^{n\sin x}-1}-\frac{m}{\mathrm{e}^{m\sin x}-1}\right)&=\lim_{y\to 1}\left(\frac{n}{y^n-1}-\frac{m}{y^m-1}\right)\\&=\lim_{y\to 1}\frac{ny^m-my^n+m-n}{(y^n-1)(y^m-1)}.\end{aligned}$$

又由 $y^\alpha-1\sim\alpha(y-1)\ (y\to 1)$ 可得

$$\lim_{y\to 1}\frac{ny^m-my^n+m-n}{(y^n-1)(y^m-1)}=\lim_{y\to 1}\frac{ny^m-my^n+m-n}{nm(y-1)^2},$$

再利用 L'Hospital 法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 1}\frac{ny^m-my^n+m-n}{nm(y-1)^2}&=\lim_{y\to 1}\frac{y^{m-1}-y^{n-1}}{2(y-1)}\\&=\lim_{y\to 1}\frac{my^{m-2}-ny^{n-2}}{2}=\frac{m-n}{2},\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{n}{\mathrm{e}^{n\sin x}-1}-\frac{m}{\mathrm{e}^{m\sin x}-1}\right)=\frac{m-n}{2}.$$

例 6.3.26 (利用 Taylor 公式) 求

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)-\tan(1-x)}{\sin\left(1-\dfrac{1}{x}\right)-\tan\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}.$$

解 当 $x\to 1$ 时, 由 Taylor 公式可得

$$\begin{aligned}\sin(1-x)&=(1-x)-\frac{(1-x)^3}{3!}+o((1-x)^3),\\\sin\left(1-\frac{1}{x}\right)&=-\frac{1-x}{x}+\frac{(1-x)^3}{3!x^3}+o((1-x)^3),\\\tan(1-x)&=(1-x)+\frac{(1-x)^3}{3!}+o((1-x)^3),\\\tan\left(1-\frac{1}{x}\right)&=-\frac{1-x}{x}-\frac{(1-x)^3}{3!x^3}+o((1-x)^3),\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)-\tan(1-x)}{\sin\left(1-\dfrac{1}{x}\right)-\tan\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-\dfrac{1}{3}(1-x)^3+o((1-x)^3)}{\dfrac{1}{3x^3}(1-x)^3+o((1-x)^3)}=-1.$$

利用 Taylor 公式把复杂的变量用多项式近似代替，不仅能简化变量，而且可以做出阶的比较，这是一种较有效的方法. 关于此方面的内容，我们在第 5 章中已做了较多的介绍，在此不再赘述.

例 6.3.27 (利用积分中值定理) 设 $p<3$, 求

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{1}{x^p}\sin\frac{n}{x}\mathrm{d}x.$$

解 令 $t=\dfrac{n}{x}$, 则由积分第二中值定理可知，对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{1}{x^p}\sin\frac{n}{x}\,\mathrm{d}x\right|&=\left|\frac{1}{n^{p-1}}\int_{n}^{n^2}t^{p-2}\sin t\mathrm{d}t\right|\\&=\left|\frac{1}{n^{p-1}}\left(n^{p-2}\int_{n}^{\xi}\sin t\mathrm{d}t+n^{2p-4}\int_{\xi}^{n^2}\sin t\mathrm{d}t\right)\right|\\&\leqslant\frac{1}{n}\left|\int_{n}^{\xi}\sin t\mathrm{d}t\right|+\frac{1}{n^{3-p}}\left|\int_{\xi}^{n^2}\sin t\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\frac{2}{n}+\frac{2}{n^{3-p}}.\end{aligned}$$

在上式中，令 $n\to\infty$, 并由 $p<3$ 可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{1}{x^p}\sin\frac{n}{x}\,\mathrm{d}x=0.$$

例 6.3.28 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，求证：对 $\forall\, c,\ d\ (a<c<d<b)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\int_{c}^{d}\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f\left(x-\frac{1}{n}\right)\right]\mathrm{d}x=f(d)-f(c).$$

证明 对 $\forall\, c,\ d\ (a<c<d<b)$ 及 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 当 $n>\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{1}{b-d}$ 时，有

$$\begin{aligned}\int_{c}^{d}\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f\left(x-\frac{1}{n}\right)\right]\mathrm{d}x&=\int_{c}^{d}f\left(x+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}x-\int_{c}^{d}f\left(x-\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{c+\frac{1}{n}}^{d+\frac{1}{n}}f(t)\mathrm{d}t-\int_{c-\frac{1}{n}}^{d-\frac{1}{n}}f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{d-\frac{1}{n}}^{d+\frac{1}{n}}f(t)\mathrm{d}t-\int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}}f(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

故由 $f(x)$ 连续可知，存在 $\xi_n\in\left(c-\dfrac{1}{n},c+\dfrac{1}{n}\right)$, $\eta_n\in\left(d-\dfrac{1}{n},d+\dfrac{1}{n}\right)$, 使得

$$\int_{c}^{d}\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f\left(x-\frac{1}{n}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{2}{n}f(\eta_n)-\frac{2}{n}f(\xi_n),$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n = c,\quad \lim_{n\to\infty}\eta_n = d,$$

于是由 $f(x)$ 连续可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\int_c^d\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f\left(x-\frac{1}{n}\right)\right]\mathrm{d}x = f(d)-f(c).$$

例 6.3.29 (利用 Stirling 公式) 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n}.$$

解 由 Stirling 公式 (见例 6.2.16 的注)

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}\quad (0<\theta_n<1)$$

可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}} = 0.$$

例 6.3.30 求

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{1-\frac{1}{k}}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k}.$$

解 因为对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\prod_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{1-\frac{1}{k}}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k} = \mathrm{e}^{n-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n}}\prod_{k=1}^{n}\frac{k^k}{(1+k)^k} = \mathrm{e}^{-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n}}\frac{n!\mathrm{e}^n}{(1+n)^n},$$

所以由 Stirling 公式可得

$$\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{1-\frac{1}{k}}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k} = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n}}n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}\quad (0<\theta_n<1).$$

另一方面，对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 由

$$\ln n \leqslant \ln(n+1) = \int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant 1+\int_1^n\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 1+\ln n$$

可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 0,$$

即

$$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n} = -\ln n - c + \varepsilon_n\quad (c\text{ 为常数},\quad \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0),$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{1-\frac{1}{k}}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-c+\varepsilon_n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\mathrm{e}^{\frac{\theta n}{12n}}=\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-(1+c)}.$$

注 利用 Stirling 公式求极限的问题不是很多，一些带有阶乘的数列用它来求极限确实很方便.

例 6.3.31 (借助积分定义和积分中值定理)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $s(x)=2[2x]-4[x]$，求证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)s(nx)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$ 及 $k=0,1,\cdots,n-1$，当 $\dfrac{k}{n}\leqslant x<\dfrac{k}{n}+\dfrac{1}{2n}$ 时，有

$$s(nx)=2[2nx]-4[nx]=2(2k)-4k=0,$$

当 $\dfrac{k}{n}+\dfrac{1}{2n}\leqslant x<\dfrac{k}{n}+\dfrac{1}{n}$ 时，有

$$s(nx)=2[2nx]-4[nx]=2(2k+1)-4k=2,$$

故由定积分的区间可加性可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)s(nx)\mathrm{d}x&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x)s(nx)\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}}f(x)s(nx)\mathrm{d}x+\int_{\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}}^{\frac{k}{n}+\frac{1}{n}}f(x)s(nx)\mathrm{d}x\right]\\&=2\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}}^{\frac{k}{n}+\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x=2\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\frac{1}{2n}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k\quad\left(\frac{k}{n}\leqslant\xi_k\leqslant\frac{k}{n}+\frac{1}{n},\ \Delta x_k=\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)s(nx)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

注 在例 6.3.31 中，如果把 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上“连续”换成“可积”，则结论仍然成立. 证法如下：我们已证得

$$\int_0^1 f(x)s(nx)\mathrm{d}x=2\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}}^{\frac{k}{n}+\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x.$$

于是由

$$2\int_{\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}}^{\frac{k}{n}+\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x-\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}+\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}}^{\frac{k}{n}+\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x-\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}}f(x)\mathrm{d}x$$

及

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x,$$

可得

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)s(nx)\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}}^{\frac{k}{n}+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x - \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}} f(x)\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k,\end{aligned}$$

其中 $\omega_k\ (k=0,1,\cdots,n-1)$ 为 $f(x)$ 在 $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ 上的振幅.

由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，并根据函数可积的充分必要条件可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k = 0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)s(nx)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

例 6.3.32 设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续，求证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 由定积分的区间可加性可得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{2(k+1)\pi}{n}} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{n}} f(x)\sin nx\mathrm{d}x - \int_{\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[f(\xi_k)\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{n}}\sin nx\mathrm{d}x - f(\eta_k)\int_{\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}}\sin nx\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}[f(\xi_k)+f(\eta_k)],\end{aligned}$$

其中 $\xi_k\in\left[\frac{2k\pi}{n},\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\right]$, $\eta_k\in\left[\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{n},\frac{2k\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right]\ (k=0,1,2,\cdots)$.

由 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续及介值定理可知，存在 $\sigma_k\in\left[\frac{2k\pi}{n},\frac{2(k+1)\pi}{n}\right]$, 使得

$$2f(\sigma_k) = f(\xi_k)+f(\eta_k)\quad (k=0,1,2,\cdots),$$

于是由定积分的定义可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\sigma_k)\right]=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x.$$

例 6.3.33 (利用初等变形) 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}.$$

解 因为对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, $n\geqslant 2$ 及 $k=2,3,\cdots,n$, 有

$$\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}=\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{(k+1)^2-(k+1)+1}{k^2-k+1},$$

所以由

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}=\frac{2\cdot 3\cdots(n-1)}{3\cdot 4\cdots(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}$$

及

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)^2-(k+1)+1}{k^2-k+1}=\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{2^2-2+1}=\frac{n^2+n+1}{3}$$

可得

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\prod_{k=2}^{n}\left[\frac{(k-1)}{(k+1)}\cdot\frac{(k+1)^2-(k+1)+1}{k^2-k+1}\right]=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)},$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=\frac{2}{3}.$$

例 6.3.34 求

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}.$$

解 当 $x=0$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=1.$$

当 $x\neq 0$ 时，对 $n\in\mathbb{Z}^+$, 由 $\sin\dfrac{x}{2^{n-1}}=2\cos\dfrac{x}{2^n}\sin\dfrac{x}{2^n}$ 可得

$$\sin x=2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n},$$

于是当 $x\neq 0$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

例 6.3.35 求

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}).$$

解 对 $\forall\, n\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-\pi n)=\sin^2\left(\frac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right),$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=\sin^2\frac{\pi}{2}=1.$$

例 6.3.36 求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right).$$

解 对 $\forall\, k\in\mathbb{Z}^+$, 由

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{k(k+2)}=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right),\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}.$$

例 6.3.37 求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right).$$

解 设 $s_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\ (n=1,2,\cdots)$, 则

$$s_n=2\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{2n-1}{2^n},$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}s_n=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=3.$$

例 6.3.38 设 $a_1\geqslant1,\ a_n=2a_{n-1}^2-1\ (n=2,3,\cdots)$, 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n a_1a_2\cdots a_{n-1}}.$$

解 对每一个 $n\ (n=2,3,\cdots)$, 由题设可得

$$a_n^2-1=(2a_{n-1}^2-1)^2-1=4a_{n-1}^2(a_{n-1}^2-1),$$

于是

$$a_n^2-1=4a_{n-1}^2\cdot 4a_{n-2}^2\cdots 4a_2^2\cdot 4a_1^2(a_1^2-1)=\frac{a_1^2-1}{4}[2^n a_1a_2\cdots a_{n-1}]^2.$$

另一方面，由 $a_1\geqslant 1$ 及 $a_n=a_{n-1}^2+(a_{n-1}^2-1)$, 并根据数学归纳法可证得

$$a_n\geqslant 1\quad (n=1,2,\cdots),$$

故

$$\lim_{n\to\infty}(2^n a_1a_2\cdots a_{n-1})=+\infty,$$

从而由

$$\frac{a_n^2-1}{[2^n a_1a_2\cdots a_{n-1}]^2}=\frac{a_1^2-1}{4}$$

可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n a_1a_2\cdots a_{n-1}}=\frac{\sqrt{a_1^2-1}}{2}.$$

习题 6.3

6.3.1 设 $f(x)\in C[-1,1]$, 求证

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{x^2+h^2}f(x)\mathrm{d}x=\pi f(0).$$

6.3.2 设 $f(x)\in C[-1,1]$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=f(0),$$

其中

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}(1-x)^n, & x\geqslant 0,\\ \mathrm{e}^{nx}, & x<0.\end{cases}$$

6.3.3 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 均存在，求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

6.3.4 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(n^k+1)^{-\frac{1}{k}}=1$.

6.3.5 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x+\sin x)^{\frac{1}{x^3}}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}\right)^x$;

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\tan x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}$;　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\tan x-\sin\tan x}{x\sin^2 x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$.

6.3.6 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $(-1,1)$ 上具有连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$. 如果

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{x^2}$$

存在，求证

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(f(x))-f(g(x))}{f^2(x)}=0.$$

6.3.7 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, 其中数列 $\{x_n\}$ 分别为：

(1) $x_1=0,\ x_{n+1}=\dfrac{x_n+3}{4}$;　　(2) $x_1=0,\ x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$;

(3) $x_1=1,\ x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$;　　(4) $x_1=10,\ x_{n+1}=\arctan x_n$.

6.3.8 设 $0<x_n<1\ (n=1,2,\cdots)$, 且 x_n 满足方程 $x+x^2+\cdots+x^n=1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

6.3.9 设 $f(x)$ 在 $(-a,a)\ (a>0)$ 上具有任意阶导数，而 $\{f^{(n)}(x)\}$ 在 $(-a,a)$ 上一致收敛，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n)}(0)=1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n)}(x)$.

6.3.10 设 $0<x_0<1$，$x_{n+1}=\dfrac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}\ (n=0,1,2,\cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(提示：考查 $\varphi(x)=\dfrac{x(x^2+3)}{3x^2+1}$ 的单调性.)

6.3.11 设 $x_0=a>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(2x_n+\dfrac{a}{x_n^2}\right)\ (n=0,1,2,\cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(提示：分别讨论 $a>1$，$a=1$，$a<1$ 三种情形.)

6.3.12 设 $x_0=\dfrac{1}{3}$，$x_n=\dfrac{1}{2}x_{n-1}^2-1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

6.3.13 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i}{n}\pi$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^s+2^s+\cdots+n^s}{n^{s+1}}\ (s>-1)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-\frac{3}{2}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i+\sqrt{n^2-i^2}}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}$;　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}$.

6.3.14 求证 $\sum\limits_{i=1}^{n}i^k=O(n^{k+1})\ (n\to\infty)$.

6.3.15 设 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 内单调，且在 $x=0$ 邻域内无界，求证：如果 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

6.3.16 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, 并由此计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}$.

6.3.17 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{-1}$.

6.3.18 设 $\varphi(x)\in C[a,b]$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_a^b\varphi(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x$.

6.3.19 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{C_{n+2}^2}$.

6.3.20 试用 Toeplitz 定理证明 Stolz 定理.

6.3.21 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}$.

(提示: $k^3+6k^2+11k+5=(k+3)(k+2)(k+1)-1$.)

6.3.22 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{2^{2^k}+1}{2^{2^k}}$.

6.3.23 设 $x_1=1$, $x_{n+1}=(n+1)(x_n+1)(n=1,2,\cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x_k}\right)$.

(提示: 先确定 x_k 的表达式.)

附录 I　Peano 曲线

设 D 为平面 $\mathbb{R}^2$ 上的一个正方形区域，$\varGamma$ 为 D 上的一条连续曲线，如果 $\varGamma$ 经过 D 上的每一个点，则称 $\varGamma$ 为“充满空间”曲线．由于“充满空间”曲线首先由 Peano 给出，故又称为 Peano 曲线． Peano 曲线说明了连续函数图像的复杂性，它推动了对曲线概念和维数概念的深入研究．

Peano 曲线有多种构造方法，例如， Hilbert 方法和 Schoenberg 方法等．下面我们将要介绍的是 Schoenberg 方法．

定理 (Peano 定理)

在平面 $\mathbb{R}^2$ 上存在一条连续曲线，它通过单位正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 内每一点．

证明 作一个以 2 为周期的函数 $f(t)$, 它在 $[0,2]$ 上的表达式为

$$f(t)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{3},\ \dfrac{5}{3}\leqslant t\leqslant 2,\\ 3t-1, & \dfrac{1}{3}\leqslant t\leqslant \dfrac{2}{3},\\ 1, & \dfrac{2}{3}\leqslant t\leqslant \dfrac{4}{3},\\ -3t+5, & \dfrac{4}{3}\leqslant t\leqslant \dfrac{5}{3},\end{cases}$$

则易验证 $f(t)$ 连续，且

$$\max_{-\infty<x<+\infty}\{f(x)\}=1,\quad \min_{-\infty<x<+\infty}\{f(x)\}=0.$$

定义 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 如下：

$$\varphi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(3^{2n-2}t)}{2^n},\quad \psi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(3^{2n-1}t)}{2^n},$$

则由优级数判别法可知，这两个级数均是一致收敛的，从而 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 都连续．

设曲线 $\varGamma$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\quad(-\infty<t<+\infty),\end{cases}$$

则 $\varGamma$ 是一条连续曲线，且由

$$0\leqslant\varphi(t)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1,\quad 0\leqslant\psi(t)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

可知，曲线 $\varGamma$ 在正方形 $\subset[0,1]\times[0,1]$ 上．

下面来证明 $\varGamma$ 为 Peano 曲线，即对 $\forall(a,b)\in[0,1]\times[0,1]$, 有 $(a,b)\in\varGamma$.

对 $\forall\,(a,b)\in[0,1]\times[0,1]$, 则 a, b 可用二进制数表示为

$$a=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n},\quad b=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2^n}\quad(\text{其中 } a_n,\ b_n \text{ 只取 } 0 \text{ 或 } 1),$$

并令

$$c=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n}\quad(\text{这里 } c_{2n-1}=a_n,\ c_{2n}=b_n).$$

如果能够证明

$$f(3^{2n-2}c)=a_n,\quad f(3^{2n-1}c)=b_n,\tag{$*$}$$

我们就得到了 $\varphi(c)=a$, $\psi(c)=b$, 从而问题得证.

令

$$3^kc=2\sum_{n=1}^{k}\frac{c_n}{3^{n-k}}+2\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{c_n}{3^{n-k}}=2m_k+d_k$$

其中

$$m_k=\sum_{n=1}^{k}\frac{c_n}{3^{n-k}},\quad d_k=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{n+k}}{3^n}\quad(k=1,2,\cdots).$$

由 m_k 为整数及 f 以 2 为周期可得

$$f(3^kc)=f(d_k)\quad(k=1,2,\cdots).$$

如果 $c_{k+1}=0$, 则由

$$0\leqslant d_k=2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_{n+k}}{3^n}\leqslant 2\sum_{n=2}^{\infty}3^{-n}=\frac{1}{3}$$

可知 $f(d_k)=0=c_{k+1}$; 如果 $c_{k+1}=1$, 则由

$$d_k=2\left(\frac{1}{3}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_{n+k}}{3^n}\right)=\frac{2}{3}+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_{n+k}}{3^n}$$

可知, $\dfrac{2}{3}\leqslant d_k\leqslant 1$, 于是 $f(d_k)=1=c_{k+1}$.

综上可知,

$$f(3^kc)=f(d_k)=c_{k+1}\quad(k=1,2,\cdots),$$

即 $(*)$ 式成立. ▮

附录 II　关于 e 的超越性

实数可分为代数数与超越数两大类，代数数是指满足某个整系数代数方程

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$$

的数，如 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 等均为代数数；而不满足任何整系数代数方程的实数则称为超越数．早在 1844 年， Liouville 首先证明了超越数的存在性 (超越数有无穷多个)，后来人们相继证明了 e (Hermite, 1873) 、 π (Lindeman, 1882) 、 $2^{\sqrt{2}}$ (Кузьмин, 1930) 、 e^{π} (Гельфонд, 1929) 等是超越数．但对于 Euler 常数是否为超越数，甚至是否为无理数的问题至今尚无结论．

在本附录中，我们将利用微分学和代数学的知识来证明

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

为超越数．

定理 (Hermite) e 为超越数．

证明 反证法．假如 e 为某个整系数代数方程

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m=0\quad(a_0,\ a_m\neq 0)$$

的根，我们来推出矛盾．

设 $f(x)$ 为任意一个 n 次多项式，则有 $f^{(n+1)}(x)=0$. 由分部积分公式可得

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t&=-f(t)\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^x+\int_0^x f'(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\\&=-f(t)\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^x-f'(t)\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^x+\int_0^x f''(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\\&\cdots\\&=-f(t)\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^x-f'(t)\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^x-\cdots-f^{(n)}(t)\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^x\\&=\sum_{k=0}^n f^{(k)}(0)-\sum_{k=0}^n f^{(k)}(x)\mathrm{e}^{-x}.\end{aligned}$$

记 $F(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)+\cdots+f^{(n)}(x)$, 则

$$\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=F(0)-\mathrm{e}^{-x}F(x),$$

于是

$$\mathrm{e}^xF(0)=F(x)+\mathrm{e}^x\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

分别令 $x = 0,\ 1,\ 2, \cdots, m$, 代入上式可得

$$\begin{gathered} \mathrm{e}^0 F(0) = F(0) + \mathrm{e}^0 \int_0^0 f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, \\ \mathrm{e}^1 F(0) = F(1) + \mathrm{e}^1 \int_0^1 f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, \\ \mathrm{e}^2 F(0) = F(2) + \mathrm{e}^2 \int_0^2 f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, \\ \cdots, \\ \mathrm{e}^m F(0) = F(m) + \mathrm{e}^m \int_0^m f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t. \end{gathered}$$

将上述等式从上到下分别乘以 $a_0,\ a_1,\ a_2, \cdots, a_m$, 并相加可得

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{m} a_k \mathrm{e}^k F(0) \\ &= a_0 F(0) + a_1 F(1) + \cdots + a_m F(m) + \sum_{k=0}^{m} a_k \mathrm{e}^k \int_0^k f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t. \end{aligned} \qquad (*)$$

注意 $(*)$ 式对一切多项式 $f(x)$ 均成立. 如果我们能找到一个 $f(x)$ 使 $(*)$ 式不成立, 便证明了该定理为真.

对上述取定的 m, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(m^{m+1})^n}{n!} = 0$ 可知, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 有

$$(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_m|)\mathrm{e}^m m^m \frac{(m^{m+1})^n}{n!} < \frac{1}{2}.$$

选取一素数 p, 使得 $p > \max\{N+1, m, |a_0|\}$, 并作函数

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \cdots (x-m)^p,$$

则可验证 $f(x)$ 满足下列条件:

(1) $f^{(k)}(i) = 0\ (k = 0, 1, \cdots, p-1,\ i = 1, 2, \cdots, m)$;

(2) $f^{(k)}(0) = 0\ (k = 0, 1, \cdots, p-2)$;

(3) 对 $\forall\, k \geqslant p$ 及 $i = 0, 1, \cdots, m$, $f^{(k)}(i)$ 为整数, 且能被 p 整除.

由此可知, 当 $n = (m+1)p - 1 > p$ 时, 对每一个 $i\ (i = 1, 2, \cdots, m)$,

$$\begin{aligned} F(i) &= f(i) + f'(i) + \cdots + f^{(p-1)}(i) + f^{(p)}(i) + \cdots + f^{(n)}(i) \\ &= f^{(p)}(i) + \cdots + f^{(n)}(i) \end{aligned}$$

能被 p 整除. 由 p 为素数及

$$f^{(p-1)}(0) = ((-1)^m m!)^p \quad (p > m)$$

可知，$f^{(p-1)}(0)$ 不能被 p 整除，从而

$$\begin{aligned} F(0) &= f(0) + f'(0) + \cdots + f^{(p-2)}(0) + f^{(p-1)}(0) + \cdots + f^{(n)}(0) \\ &= f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \cdots + f^{(n)}(0) \end{aligned}$$

为不能被 p 整除的整数. 又由 $p > |a_0|$ 可知，p 不能整除 $|a_0|$, 故 $a_0F(0)$ 不能被 p (p 为素数) 整除，于是

$$q = a_0F(0) + a_1F(1) + \cdots + a_mF(m)$$

不能被 p 整除. 由 q 的定义可知，q 为非零整数，从而 $|q| \geqslant 1$.

另一方面，记 $c = (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_m|)\mathrm{e}^m$, 由 $f(x)$ 的定义可得

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=0}^{m} a_k \mathrm{e}^k \int_0^k f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{m} |a_k|\mathrm{e}^k \left|\int_0^k f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{m} |a_k|\mathrm{e}^m \int_0^m |f(t)|\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\ &= c\int_0^m |f(t)|\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\ &< c\frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}\int_0^m \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\ &< cm^m\frac{(m^{m+1})^{p-1}}{(p-1)!} < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

于是

$$q + \sum_{k=0}^{m} a_k \mathrm{e}^k \int_0^k f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

这与 (*) 式矛盾，此矛盾说明定理结论成立. ▌

主要参考书目

[1] 方企勤. 数学分析 (第一册). 北京：高等教育出版社， 1986.

[2] 沈燮昌. 数学分析 (第二册). 北京：高等教育出版社， 1986.

[3] 廖可人，李正元. 数学分析 (第三册). 北京：高等教育出版社， 1986.

[4] 林源渠，方企勤，李正元，等. 数学分析习题集. 北京：高等教育出版社，1986.

[5] G. 波利亚， G. 舍贵. 数学分析中的问题和定理 (第一卷).(张奠宙，宋国栋，等，译) 上海：上海科学技术出版社， 1981.

[6] 徐利治，王兴华. 数学分析的方法及例题选讲 (修订版). 北京：高等教育出版社， 1983.

[7] 孙本旺，汪浩. 数学分析中的典型例题和解题方法. 长沙：湖南科学技术出版社， 1981.

[8] G. 克莱姆鲍尔. 数学分析. (孙本旺，译) 长沙：湖南人民出版社， 1981.

[9] B.A. 萨多夫尼奇，A.C. 波德科尔津. 大学奥林匹克数学竞赛试题解答集. (王英新，李世华，译) 长沙：湖南科学技术出版社， 1981.

[General Information]
书名=数学分析方法选讲
作者=刘德祥，刘绍武，冯立新主编
页数=262
SS号=13486847
DX号=
出版日期=2014.01
出版社=黑龙江大学出版社

封面
书名
版权
前言
目录
第1章　分析证明中的几种常用处理方法与技巧
1.1截断
习题1.1
1.2叠加
习题1.2
1.3局部化方法
习题1.3
1.4借助辅助函数
习题1.4
1.5离散型问题与连续型问题的相互转换
习题1.5
1.6ε逼迫方法
习题1.6
1.7借助于构造点列和抽取子列
习题1.7
1.8关于利用实数空间基本定理证明问题的几点注释
1.8.1有理数集的性质
1.8.2实数集的性质
1.8.3关于利用实数空间基本定理证明问题的几点注释
习题1.8
第2章Abel方法
2.1　Abel变换与Abel引理
习题2.1
2.2　Abel方法在级数收敛性判别中的应用
2.2.1数项级数收敛性的判别法
2.2.2函数项级数一致收敛性判别法
习题2.2
2.3 Abel方法在广义积分收敛性判别中的应用
2.3.1分部积分公式与积分第二中值定理
2.3.2无穷限广义积分收敛性的Abel判别法与Dirichlet判别法
2.3.3带参变量广义积分一致收敛性的Abel判别法与Dirichlet判别法

习题2.3
2.4 Abel级数求和法
习题2.4
2.5差分的概念及简单应用
习题2.5
第3章 不等式与估值问题
3.1不等式的初等证法
习题3.1
3.2证明不等式的凸函数方法
3.2.1凸函数的定义及基本性质
3.2.2证明不等式的凸函数方法
习题3.2
3.3利用微分学证明不等式
习题3.3
3.4利用积分学证明不等式
习题3.4
3.5估值问题
习题3.5
第4章 几种运算次序的交换性
4.1一致收敛性
4.1.1函数项级数的一致收敛性
4.1.2含参变量积分的一致收敛性
习题4.1
4.2运算次序的交换性
4.2.1求和与其他运算的可换性
4.2.2积分与其他运算次序的可换性
习题4.2
第5章 阶的估计及应用
5.1阶的定义及运算
5.1.1无穷小量与无穷大量的阶的定义
5.1.2阶的性质和运算
习题5.1
5.2阶的估计
5.2.1函数的Taylor展开式
5.2.2阶与主部的求法
习题5.2
5.3阶的应用

5.3.1利用阶计算极限
5.3.2阶的估计在级数与广义积分收敛性中的应用
习题5.3
第6章　极限的存在性与求值问题
6.1关于极限定义的若干注释
6.1.1关于过程的刻画和变量的刻画
6.1.2关于变量不存在极限的描述
6.1.3变量趋于无穷大的情形
习题6.1
6.2关于极限的存在性
习题6.2
6.3极限的求值
6.3.1利用定义和两边夹原理求极限
6.3.2利用Stolz定理和L'Hospital法则求极限
6.3.3建立以极限值为变元的方程求极限
6.3.4利用积分和求极限
6.3.5利用Reimann引理求极限
6.3.6利用Toeplitz定理求极限
6.3.7求极限的其他方法
习题6.3
附录Ⅰ　Peano曲线
附录Ⅱ关于e的超越性
主要参考书目